ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$$

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

1.1. $(x-2y)^2=$

1.2. $(3a+2\beta)^2=$

1.3. $(2x+3)^2=$

1.4. $(x^3-2y)^2=$

1.5. $\left(\sqrt{5}-2\right)^2=$

1.6. $\left(2x-\frac{3}{x}\right)^2=$

1.7. $(5x-y)(5x+y)=$

1.8. $(2y-4\omega)(2y+4\omega)=$

1.9. $\left(2y+\frac{x}{4}\right)\left(\frac{x}{4}-2y\right)=$

1.10. $(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)=$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

2.1. $(x-3)^2+(x+4)^2=$

2.2. $(x-2a)^2-(x+a)^2=$

2.3. $(x-1)(x^2+1)(x^4+1)(x+1)=$

2.4. $x(x-2)^2+2(2x+3)(3-2x)=$

3) Αφού κάνετε τις πράξεις, να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $y=-1$.

$$(2y+1)^2-2(1+3y)(3y-1)-(5-y)^2=$$

4) Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = x^2 + 2x + 3$ και $Q(x) = 2x - 1$.

1) Να βρείτε το $P(\alpha - 1)$.

2) Να αποδείξετε ότι: $P(\alpha - 1) + Q(\alpha) = (\alpha + 1)^2$.

5) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -2x^2 + 2x + 80$.

1) Να βρείτε το $P(x - 1)$.

2) Να αποδείξετε ότι $P(x) - P(x - 1) = 4 - 4x$.

3) Να υπολογίσετε το $P(100) - P(99)$.

6) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(3\alpha + \beta)^2 - (3\alpha - \beta)^2$, αν $\alpha\beta = 8$.

7) Αν $\alpha + \beta = 6$ και $\alpha\beta = 3$, να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 30$.

8) Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

8.1. $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$

8.2. $(\alpha^2 + 4)(x^2 + 1) - (ax + 2)^2 = (2x - a)^2$

8.3. $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = -8$

8.4. $\left(\frac{3\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\alpha-\beta}{2}\right)^2 = 3\alpha\beta$

<u>ΕΝΟΤΗΤΑ 2</u>: ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ - ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

↓

ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ από όλους τους όρους

ΔΙΩΝΥΜΑ (2 ΟΡΟΙ)	**ΤΡΙΩΝΥΜΑ (3 ΟΡΟΙ)**	**ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ 4 ΟΡΟΥΣ**	**ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ 5 ΟΡΟΥΣ**
➢ Διαφορά δύο τετραγώνων $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$ ➢ Άθροισμα ή Διαφορά δύο Κύβων $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ $^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$	➢ Τέλειο Τετράγωνο $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$ ➢ Τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma = (x + \kappa)(x + \lambda)$ όπου $\kappa \cdot \lambda = \gamma$ και $\kappa + \lambda = \beta$	Χωρίζω σε ομάδες ➢ Δύο – Δύο ➢ Τρεις με ένα (Οι τρεις τέλειο τετράγωνο και ο άλλος τετράγωνο και στο τέλος διαφορά τετραγώνων)	Χωρίζω σε ομάδες: ➢ Τρεις με δύο **ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕ 6 ΟΡΟΥΣ** Χωρίζω σε ομάδες: ➢ Τρεις με τρεις ➢ Δύο – Δύο - Δύο

1) Να αναλύσετε <u>**πλήρως**</u> σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

1.1. $x^3 + 7x^2 =$

1.2. $5xy^3 + 15x^2y^2 =$

1.3. $4a^2 - 9 =$

1.4. $\beta^3 - 8 =$

1.5. $y^2 - 6y + 8 =$

1.6. $9x^2 + 12x + 4 =$

1.7. $x^2 - 4x - 12 =$

1.8. $x^3 + 27y^3 =$

1.9. $ax + ay + 3x + 3y =$

1.10. $a^4 + a =$

1.11. $7a^3 - 28a =$

1.12. $x^3 + 8x^2 - 9x =$

1.13. $(2x-1)^2-y^2=$

1.14. $a^2-\beta^2-4\alpha+4\beta=$

1.15. $x^2(x-3)+4(3-x)=$

1.16. $-x^2+2x+8=$

1.17. $x^5-x=$

1.18. $a^2-5a-\beta\alpha+5\beta=$

1.19. $4x^2-4x+1-y^2=$

1.20. $x^2-4x+3-\alpha x+\alpha=$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} Η ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

1) <u>Επίλυση εξισώσεων 2^{ου} βαθμού της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$</u>

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

2) <u>Επίλυση εξισώσεων ανωτέρου βαθμού</u>

- Μεταφέρω όλους τους όρους της εξίσωσης στο α΄μέλος και κάνω το β΄μέλος = 0
- Αναλύω το α΄μέλος της εξίσωσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Παίρνω το κάθε παράγοντα ίσο με 0 και βρίσκω τις λύσεις της εξίσωσης.

1) Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

1.1. $(x-1)(x-2)=0$

1.2. $(2x-1)(x+2)(x+3)=0$

1.3. $(x+3)(x-4)=-12$

1.4. $x^2-5x-6=0$

1.5. $x^3=25x$

1.6. $x^2+7=0$

1.7. $x^2-4x=-4$

1.8. $x^3-6x^2=9x$

1.9. $2x^2-x-3=0$

1.10. $2x^2+4x+3=0$

1.11. $x^2-20=-2x^2+7$

1.12. $x(x+1)=12$

1.13. $(x-3)^2-(x+4)^2=25$

1.14. $(x+2)(x+3)=20$

1.15. $9x^2-6x+1=0$

1.16. $2x^2+8=0$

1.17. $9x^2(x-5)-6x(x-5)+x-5=0$

1.18. $y(y+6)=-9$

ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1) Να απλοποιήσετε τα πιο κάτω κλάσματα:

1.1. $\frac{-9x^4y^3\omega}{-3x^2y^2\omega} =$ **1.2.** $\frac{5x^2-10x}{x^2-3x+2} =$ **1.3.** $\frac{x^2+x-12}{2x^2+8x} =$

2) Να κάνετε τις πράξεις:

2.1. $\frac{3}{xy} - \frac{2}{x\omega} =$

2.2. $\frac{2}{x-5} + \frac{2}{2x+10} =$

2.3. $\frac{4x\alpha}{\omega} \cdot \frac{x\omega}{\alpha^2} \cdot \frac{\omega^2}{8\chi^3} =$

2.4. $\frac{x^2+x-2}{4-x^2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-1} =$

2.5. $\frac{x^2-4x-5}{x^3-x} \div \frac{x^2-25}{7x} =$

2.6. $\frac{x}{x^2+2x} - \frac{2}{2-x} - \frac{4x}{x^2-4} =$

3) Να κάνετε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

3.1. $\frac{\frac{(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)}}{(\alpha-\beta)^2} =$

3.2. $\frac{1+\frac{9}{x^2-9}}{x+\frac{x}{x-3}} =$

3.3. $\frac{x-\frac{9}{x}}{x-5+\frac{6}{x}} =$

3.4. $\frac{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2} =$

4) Να γίνουν οι πράξεις:

4.1. $\frac{x^2+2x-3}{9-x^2} \cdot \frac{2x-6}{x^2-1} =$

4.2. $\frac{x^2-3x-4}{x^3-x} \div \frac{x^2-16}{5x} =$

4.3. $\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-5x+6}\right) \div \frac{x^2}{x^2-2x} =$

4.4. $\left(\frac{x}{x^2+2x} + \frac{2}{2-x} + \frac{4x}{x^2-4}\right) \div \frac{3}{x^2+3x+2} =$

4.5. $\frac{3x^2-3}{x^3+x^2-2x} \div \left(\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}\right) =$

5) Να λύσετε τις εξισώσεις:

5.1. $\frac{1}{a}+\frac{2}{4-a^2}=\frac{1}{a-2}$

5.2. $\frac{x}{3-x}-1+\frac{7}{3+x}=\frac{28}{9-x^2}$

5.3. $\frac{x-1}{x^2-4}+\frac{5}{x^2+2x}=\frac{1}{x-2}$

5.4. $\frac{3x^2}{x-4}+\frac{2x}{2-x}=\frac{2x^3-3x^2+2x}{x^2-6x+8}$

5.5. $\frac{x^2+5}{x^2-25}+\frac{3}{5-x}=\frac{2}{x+5}-1$

5.6. $\frac{2y-1}{y^2-y-12}+\frac{5-y}{4-y}=\frac{6}{y+3}$

5.7. $\frac{1}{x+2}+\frac{6x+1}{x^2-x-6}=\frac{2}{5x-15}$

5.8. $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2$

5.9. $\frac{2}{x-3}-\frac{x-4}{x^2-9}=\frac{x+1}{x^2+3x}$

6) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{x^6-x^4}{x^3-x^2}\cdot\frac{1}{x^2+x}$ αν $x=2024$.

7) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{x}{xy+y^2}-\frac{y}{x^2+xy}\right)=x-y$

8) Αν $A=\frac{y}{2}(x+\frac{1}{x})$ και $B=\frac{y}{2}(x-\frac{1}{x})$, να δείξετε ότι $A^2-B^2=y^2$

9) $\mathrm{A}=\frac{y}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ και $\mathrm{B}=\frac{y}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$, να δείξετε ότι $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=y^2$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

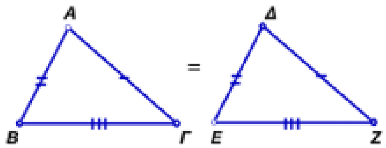
Τα **κριτήρια ισότητας τριγώνων** είναι οι προτάσεις με τις οποίες διαπιστώνουμε, με λιγότερα του ορισμού στοιχεία, την ισότητα δύο τριγώνων. Αρκούν τρία μόνο κατάλληλα στοιχεία τους , όμως το ένα πρέπει οπωσδήποτε να είναι πλευρά.

Π-Π-Π

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ B\Gamma = EZ \\ A\Gamma = \Delta Z \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$$

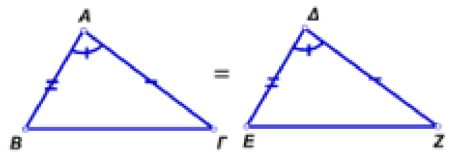


Π-Γ-Π

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την **περιεχόμενη** γωνία ίση.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} AB = \Delta E \\ A\Gamma = \Delta Z \\ \hat{A} = \hat{\Delta} \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$$

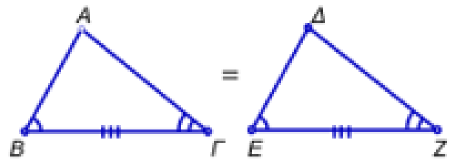


Π-Γ-Γ

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στη πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} B\Gamma = EZ \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{\Gamma} = \hat{Z} \end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{\Delta EZ}$$



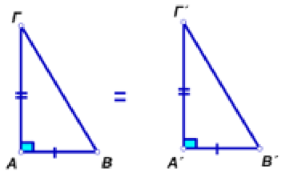
Παρατήρηση:*Στην περίπτωση που οι ίσες γωνίες δεν είναι προσκείμενες των ίσων πλευρών αλλά είναι αντίστοιχα ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

(α)Δύο **ορθογώνια τρίγωνα** είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.

- Όταν οι δύο κάθετες του ενός, είναι ίσες με τις δύο κάθετες πλευρές του άλλου.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :

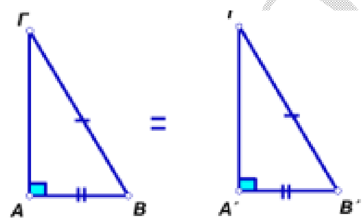
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma'\end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$$



- Όταν η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του ενός, είναι ίσες με την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του άλλου.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ B\Gamma = B'\Gamma'\end{array}\right\} \text{ οπότε είναι } \overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$$



(β)Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα , όταν έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μια αντίστοιχη
οξεία γωνία ίση.

Γενικά στα ίσα τρίγωνα <**Απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές**.>

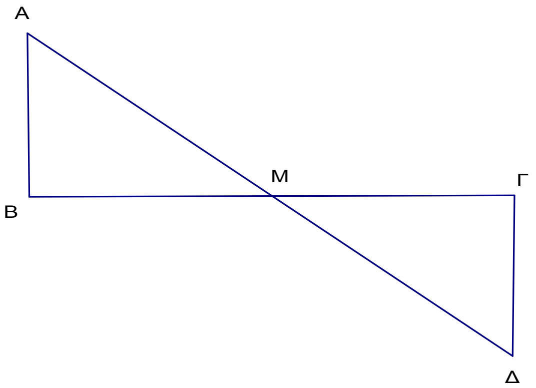
ΚΡΙΤΉΡΙΑ ΙΣΟΣΚΕΛΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Αν ισχύει μία από τις πιο κάτω συνθήκες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
(α) Δύο πλευρές να είναι ίσες(ορισμός).
(β) Δύο γωνίες του να είναι ίσες.
(γ) Αν δύο από τα δευτερεύοντα στοιχεία (ύψος, διάμεσος, διχοτόμος) που αντιστοιχούν στην ίδια πλευρά (βάση) ταυτίζονται.

1) Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, φέρουμε την διάμεσο AM. Από τυχαίο σημείο E της διαμέσου AM φέρουμε τις αποστάσεις $E\Delta$ και EZ πάνω στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

1) Οι αποστάσεις $E\Delta$ και EZ είναι ίσες.
2) Το τρίγωνο $BE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

2)



Δεδομένα	Ζητούμενα
M μέσο $B\Gamma$	α) $AB = \Gamma\Delta$
M μέσο $A\Delta$	β) $AB // \Gamma\Delta$

3) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$. Να δείξετε ότι τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.

4) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE ισούνται.

5) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$. Να δείξετε ότι οι διάμεσοι $B\Delta$ και ΓE ισούνται.

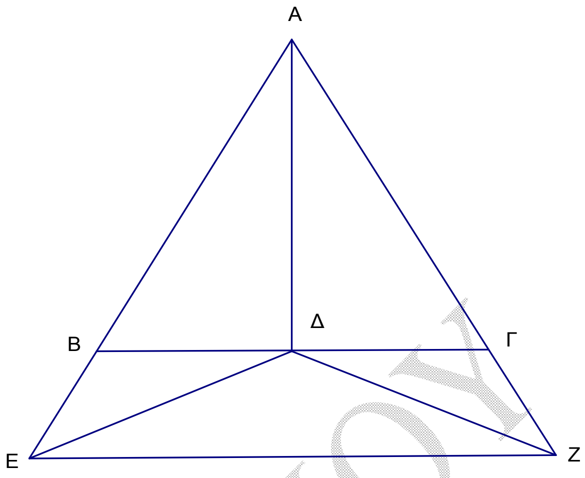
6) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ και Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Πάνω στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ προς B και Γ παίρνουμε τμήματα $BZ = \Gamma P$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta P$ και ΓEZ είναι ίσα.

7) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = B\Gamma)$. Να προεκτείνετε την βάση $A\Gamma$ προς το A και Γ κατά ίσα τμήματα $A\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τις πλευρές AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

8) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διχοτόμος $A\Delta$ της γωνιάς A . Να φέρετε τις αποστάσεις ΔE και ΔZ του σημείου Δ από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντιστοίχως. Να δείξετε ότι:
1) $\Delta E = \Delta Z$
2) Το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

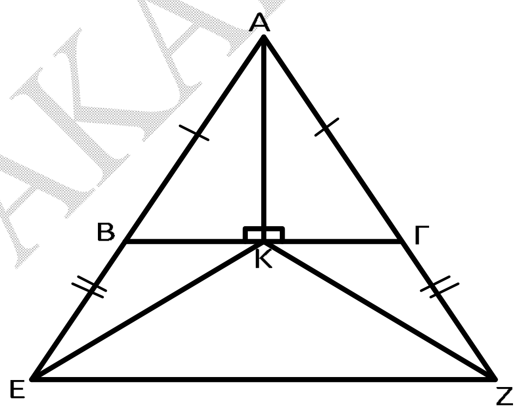
9) Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$, Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta = AE$. Αν Z είναι το μέσο της $B\Gamma$ να δείξετε ότι:
1) $\Delta Z = EZ$
2) Οι αποστάσεις των σημείων Δ και E από τις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα είναι ίσες.

10) Στο διπλανό σχήμα $AB = A\Gamma$, $A\Delta$ διχοτόμος της γωνίας A και $BE = \Gamma Z$. Να δείξετε ότι:
1) $E\Delta Z$ ισοσκελές τρίγωνο.
2) Οι αποστάσεις των E και Z από την BΓ είναι ίσες.



11)

Δεδομένα	Ζητούμενο
$AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο $AB = A\Gamma$ $BE = \Gamma Z$ $AK \perp B\Gamma$	ΚΕΖ ισοσκελές



12) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$. Προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ προς το B και Γ κατά τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:
1) Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.
2) Τα σημεία B και Γ απέχουν ίσες αποστάσεις από τις πλευρές $A\Delta$ και AE αντίστοιχα.

13) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με Δ το μέσο της AB και E το μέσο της $A\Gamma$. Από τα σημεία Δ και E φέρουμε τις αποστάσεις ΔZ και EH πάνω στη $B\Gamma$. Να δείξετε ότι:
1) $\Delta Z = EH$
2) Το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΕΥΘΕΙΑ – ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

1) Απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

2) Συντεταγμένες του μέσου M ευθύγραμμου τμήματος AB, $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$M(x_M, y_M)$, όπου $x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$ και $y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$

3) Κλίση ευθείας:

α) όταν ξέρουμε δύο σημεία της $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$$\lambda = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

β) όταν ξέρουμε την εξίσωση της

i) $y = \alpha x + \beta \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha$

ii) $y = \alpha x \quad \Rightarrow \quad \lambda = \alpha$

iii) $y = \kappa \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$

iv) $x = \kappa \quad \Rightarrow \quad \lambda: \delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota$

4) Σχετική θέση δύο ευθειών:
Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1 = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 = \lambda_2 x + \beta_2$. Οι ευθείες:

i) τέμνονται αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$

ii) είναι παράλληλες αν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$

iii) ταυτίζονται αν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 = \beta_2$

Συνθήκη παραλληλίας: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$

Συνθήκη καθετότητας: $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \iff \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

1) Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων A και B, το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB και τη κλίση της ευθείας που περνά από τα A και B, στις πιο κάτω περιπτώσεις:

1) $A(3,5)$ και $B(-4,5)$
2) $(-3,-1)$ και $B(-6,3)$

2) Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με κορυφές $A(2,2)$, $B(4,4)$ και $Γ(5,-1)$.

1) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
2) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 5$ και περνά από το σημείο $Γ$.
3) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου $ΒΔ$.

3) Να βρείτε τη σχετική θέση των πιο κάτω ευθειών:

1) $\begin{cases} \varepsilon_1: 3x - 6y = 4 \\ \varepsilon_2: -3x + 6y = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \varepsilon_1: y = 4 - \frac{1}{2}x \\ \varepsilon_2: 2x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \varepsilon_1: y = 4 \\ \varepsilon_2: y = -1 \end{cases}$

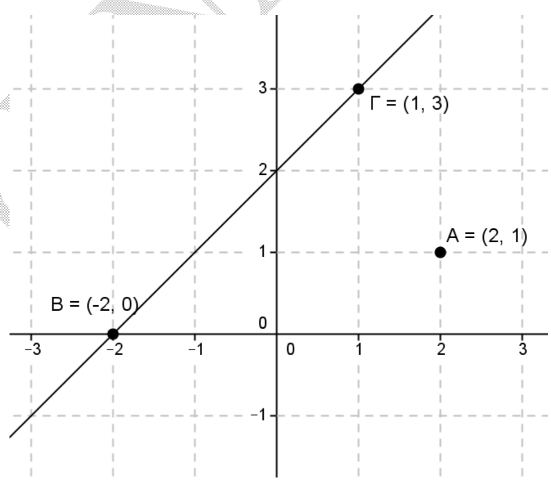
4) $\begin{cases} \varepsilon_1: x = -1 \\ \varepsilon_2: x = 7 \end{cases}$

4) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη με την ευθεία ε_1 στις πιο κάτω περιπτώσεις.

1) $A(0,0)$
$\varepsilon_1: x + 2y = 4$

2) $A(-2,4)$
$\varepsilon_1: 6x - 4y = 5$

3)



5) Αν η ευθεία $y = (\alpha - 1)x + 7$ είναι παράλληλη με την ευθεία $2x - y = -3$ να βρείτε το α.

6) Να βρείτε την τιμή του α ώστε οι ευθείες $(\alpha-2)x+3y=1$ και $y=-\frac{2}{3}x$ να είναι παράλληλες.

7) Να λύσετε τα συστήματα:

1) $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ x-4y=-13 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-2y=-16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-x+2(2x-y)=4 \\ \frac{y+x}{3}-\frac{2y-x}{2}=-\frac{5}{6} \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x-1}{5}-\frac{y+5}{2}=-3 \\ 3(y+2)-4(x-3)=3 \end{cases}$

8) Σε μία αυλή υπάρχουν κότες, κουνέλια και ένας σκύλος. Πόσα είναι τα κουνέλια και πόσες οι κότες αν έχουν συνολικά 21 κεφάλια και 56 πόδια.

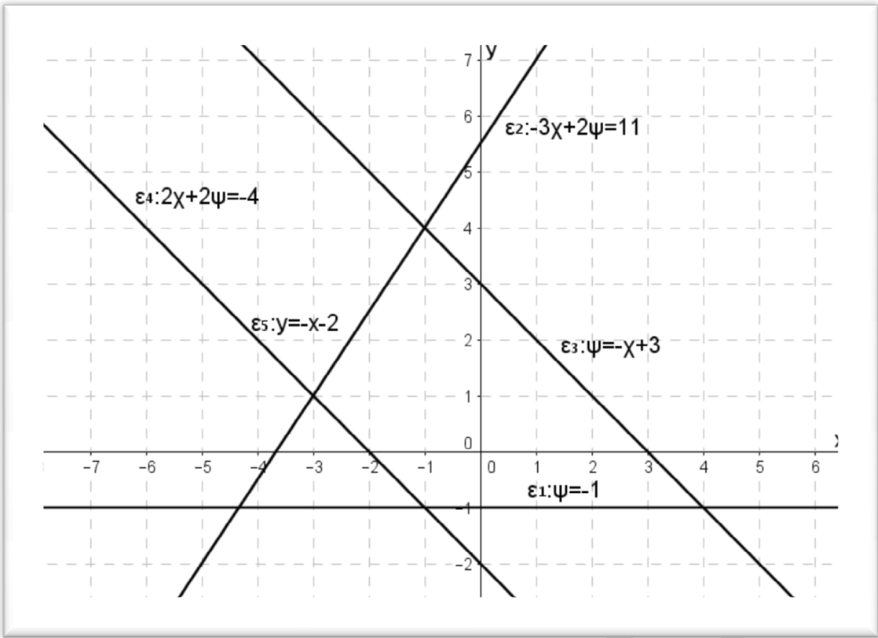
9) Στη θεατρική παράσταση του Γυμνασίου Ακακίου παρευρέθηκαν 200 άτομα, ενήλικες και παιδιά. Το εισιτήριο εισόδου για τους ενήλικες στοίχιζε €4 ενώ για τα παιδιά €3. Αν συνολικά εισπράχθηκαν €780, να βρείτε με τη <u>χρήση συστήματος</u>, πόσοι ενήλικες και πόσα παιδιά παρακολούθησαν την παράσταση.

10) Ο Κώστας αγόρασε 2 κιλά μήλα και 3 κιλά πορτοκάλια και πλήρωσε €$3{,}45$. Ο Αντρέας αγόρασε 3 κιλά μήλα και 2 κιλά πορτοκάλια και πλήρωσε €$4{,}30$. Πόσα είναι το κιλό τα μήλα και πόσα τα πορτοκάλια;

11) Σ΄ένα τηλεοπτικό παιγνίδι, σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

12) Να βρείτε τη τιμή του α, ώστε η ευθεία $y=(\alpha-1)x-3$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $x+2y=1$.

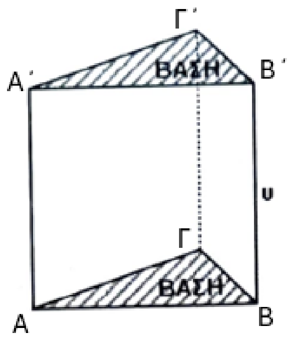
13) Χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, να εξετάσετε κατά πόσο τα ακόλουθα συστήματα έχουν μία λύση ή άπειρες λύσεις ή καμία λύση.
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



α) **ε3** : $\psi = -\chi + 3$ **ε2**: $-3\chi + 2\psi = 11$	β) **ε4**: $2\chi + 2\psi = -4$ **ε5**: $\psi = -\chi - 2$	γ) **ε3** : $\psi = -\chi + 3$ **ε5**: $\psi = -\chi - 2$	δ) **ε3**: $\psi = -\chi + 3$ **ε1**: $\psi = -1$

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΟΡΘΟ ΠΡΙΣΜΑ



- Εμβαδό Παράπλευρης Επιφάνειας:

  $E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$

- Εμβαδό Ολικής Επιφάνειας:

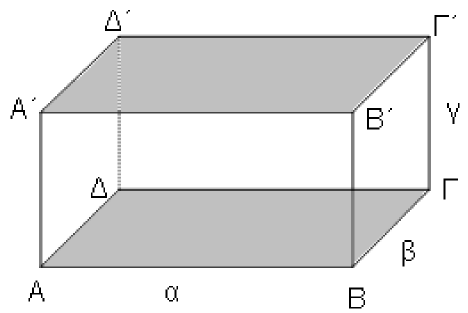
  $E_{o\lambda} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta}$

- Όγκος: $V = E_{\beta} \cdot \upsilon$

  όπου Π_{β}: Περίμετρος βάσης

  και E_{β}: Εμβαδόν βάσης

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ



- Εμβαδό Ολικής Επιφάνειας:

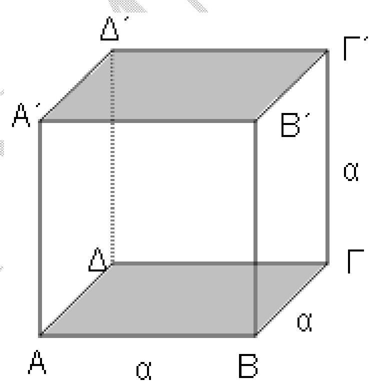
  $E_{o\lambda} = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$

- Όγκος: $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$

- Διαγώνιος παραλληλεπιπέδου:

  $\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$

ΚΥΒΟΣ



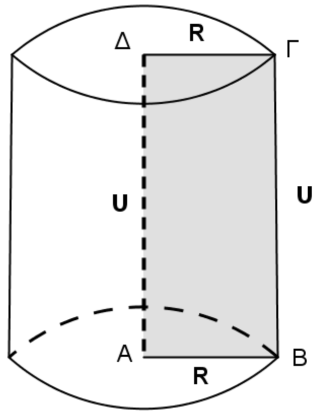
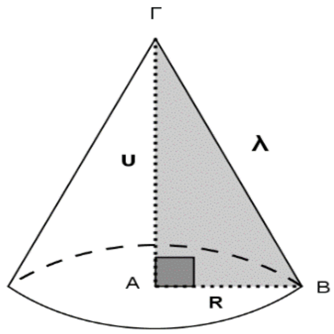
- Εμβαδό Ολικής Επιφάνειας κύβου:

  $E_{o\lambda} = 6\alpha^2$

- Όγκος κύβου: $V = \alpha^3$

- Διαγώνιος κύβου: $\delta = \alpha\sqrt{3}$

  όπου α: ακμή του κύβου

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ  ❖ υ ⇨ ύψος κυλίνδρου ❖ R ⇨ ακτίνα βάσης κυλίνδρου (κύκλος)	➢ <u>Εμβαδό Κυρτής Επιφάνειας</u> (E_κ): $E_\kappa = \Pi_\beta \cdot \upsilon \implies E_\kappa = 2\pi R\upsilon$ ➢ <u>Εμβαδό Ολικής επιφάνειας</u> ($E_{o\lambda}$): $E_{o\lambda} = E_\kappa + 2 \cdot E_\beta \Longrightarrow E_{o\lambda} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2$ ➢ <u>Όγκος κυλίνδρου:</u> $V = E_\beta \cdot \upsilon \implies V = \pi R^2 \upsilon$ όπου Π_β: Περίμετρος βάσης (μήκος κύκλου) και E_β: Εμβαδόν βάσης (εμβαδόν κύκλου)
ΚΩΝΟΣ  ❖ υ ⇨ ύψος κώνου ❖ R ⇨ ακτίνα βάσης κώνου (κύκλος) ❖ λ ⇨ γενέτειρα κώνου	➢ <u>Εμβαδό Κυρτής Επιφάνειας</u> (E_κ): $E_\kappa = \pi R\lambda$ ➢ <u>Εμβαδό Ολικής επιφάνειας</u> ($E_{o\lambda}$): $E_{o\lambda} = E_\kappa + E_\beta \Longrightarrow E_{o\lambda} = \pi R\lambda + \pi R^2$ ➢ <u>Όγκος κυλίνδρου:</u> $V = \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}$ όπου E_β: Εμβαδόν βάσης (εμβαδόν κύκλου)

<u>Μήκος (ή Περιφέρεια) κύκλου</u>: $\Gamma = 2\pi R$ και <u>Εμβαδόν κύκλου</u>: $E = \pi R^2$

όπου R: Ακτίνα του κύκλου

1) Να βρείτε το εμβαδό ολικής, τον όγκο και τη διαγώνιο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που έχει διαστάσεις $3m$, $5m$, $2m$.

2) Να βρείτε τον όγκο, το εμβαδό ολικής επιφάνειας και τη διαγώνιο κύβου με ακμή ίση με $3cm$.

3) Να βρεθεί ο όγκος του κύβου, ο οποίος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $96\ m^2$.

4) Κύβος έχει όγκο $V = 27cm^3$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

5) Θέλουμε να βάψουμε τους τοίχους ενός δωματίου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις: πλάτος $4\ m$, μήκος $5\ m$ και ύψος $3\ m$. Πόσα κιλά χρώμα πρέπει να αγοράσουμε, αν είναι γνωστό ότι ένα κιλό χρώματος καλύπτει περίπου $9\ m^2$;

6) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδό ολικής επιφάνειας κυλίνδρου που έχει διάμετρο βάσης $20cm$ και ύψος διπλάσιο της ακτίνας του.

7) Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος $20\ m$ και ακτίνα βάσης $\rho = 30\ m$. Είναι κατασκευασμένη από ειδική λαμαρίνα που κοστίζει €5 το τετραγωνικό μέτρο. Ποιο ήταν το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής;

8) Ένας κύλινδρος έχει όγκο ίσο με $96\pi\ m^3$ και ύψος $6m$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του.

9) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι $40\pi\ m^2$ και το ύψος του $4\ m$. Να βρεθούν:

1) η ακτίνα της βάσης του.
2) το εμβαδόν ολικής επιφάνειάς του.
3) ο όγκος του.

10) Κώνος έχει ακτίνα $R = 8cm$ και $\upsilon = 6\ cm$. Να βρεθούν:

1) η γενέτειρα του κώνου λ.
2) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου E_κ.
3) τον όγκο V του κώνου.

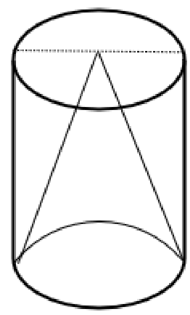
11) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδό ολικής επιφάνειας κώνου που έχει περίμετρο βάσης $10\pi\ cm$ και γενέτειρα $13cm$.

12) Κώνος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας $144\pi\ m^2$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $80\pi\ m^2$. Να βρεθούν:
1) η ακτίνα R της βάσης.
2) το ύψος υ του κώνου.
3) η γενέτειρα λ.
4) ο όγκος V του κώνου.

13) Κώνος έχει $E_\kappa = 60\pi\ m^2$ και $R = 6m$. Να βρεθεί ο όγκος του.

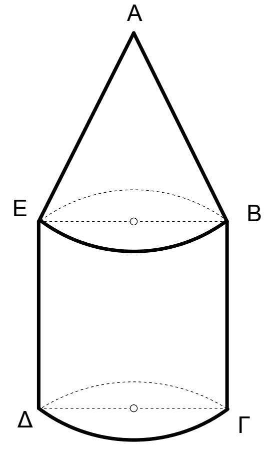
14) Το εμβαδόν της βάσης κώνου είναι $28{,}26m^2$ και η γενέτειρα $\lambda = 5m$. Να βρεθούν:
1) η ακτίνα R της βάσης.
2) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας $E_{o\lambda}$.
3) τον όγκο του V.

15) Στο διπλανό σχήμα το ύψος του κυλίνδρου είναι $12\ dm$ και η ακτίνα της βάσης του $5\ dm$. Αν μέσα στον κύλινδρο υπάρχει ένας κώνος, ο οποίος έχει την ίδια βάση με τον κύλινδρο. Να βρείτε:
1) τον όγκο του στερεού που μένει αν αφαιρεθεί ο κώνος
2) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας $E\kappa$ του κώνου

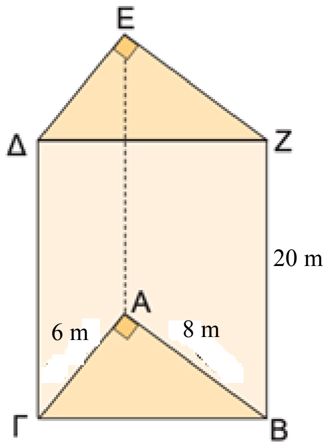


16) Στο πιο κάτω σχήμα το ύψος του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από το ύψος του κάθε κώνου (οι κώνοι είναι οι ίδιοι). Η γενέτειρα του κάθε κώνου είναι $\lambda = 13cm$ και η ακτίνα της βάσης τους $R = 5cm$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού και τον όγκο του.

17) Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύλινδρος με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $48\pi\ cm^2$ και ακτίνα βάσης $4cm$. Αν ο κώνος έχει γενέτειρα $\lambda = 5\ cm$, να βρεθεί ο όγκος του στερεού.



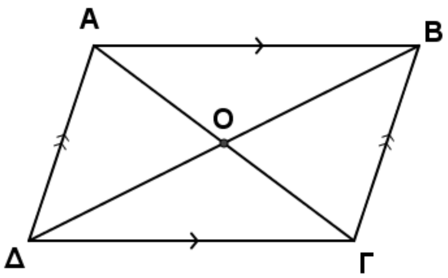
18) Οι βάσεις του πιο κάτω ορθού πρίσματος είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές $6\ cm$ και $8\ cm$ αντίστοιχα και το ύψος του είναι $20\ cm$. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του
γ) τον όγκο του.



ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Παραλληλόγραμμο

Ορισμ ΄ς : Είναι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



ΑΓ, ΒΔ : διαγώνιοι του παραλληλογράμμου
Ο : κέντρο του παραλληλογράμμου

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

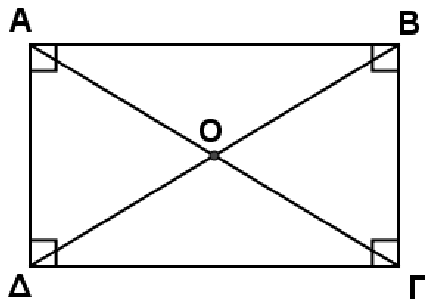
- Έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
- Έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες και τις διαδοχικές γωνίες του παραπληρωματικές.
- Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ (Αν ισχύει **ένα** από αυτά, ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο).

- Αν έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες(εξ ορισμού).
- Αν έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες.
- Αν οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.
- Αν έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες.
- Αν έχει δύο πλευρές του ίσες και παράλληλες.

Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο

Ορισμ ΄ς_: Είναι το τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

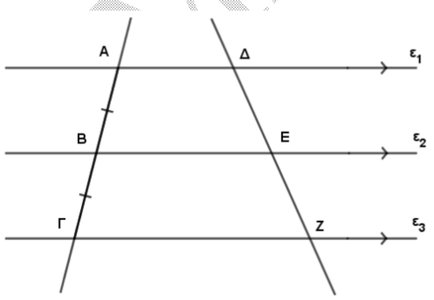
- Έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ(Αν ισχύει **ένα** από αυτά, ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

- Αν έχει τρεις ορθές γωνίες.
- Αν έχει όλες τις γωνιές του ίσες.
- Αν είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία.
- Αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

- Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες αποκόπτουν από μια ευθεία ίσα ευθύγραμμα τμήματα, τότε θα αποκόπτουν ίσα ευθύγραμμα τμήματα και από κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

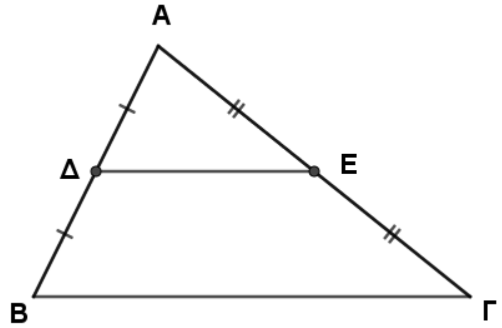


δηλαδή αν:

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_1//\varepsilon_2//\varepsilon_3\\ \mathrm{AB}=\mathrm{B\Gamma}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta\mathrm{E}=\mathrm{EZ}$$

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

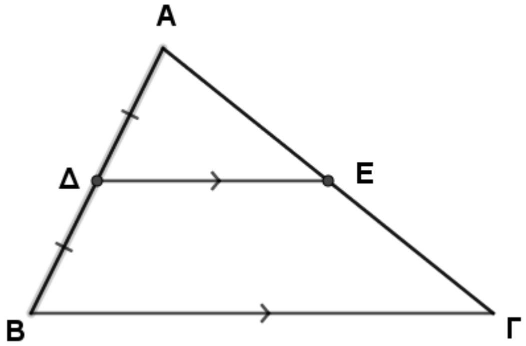
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά του και ισούται με το μισό της.



δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta \text{ μέσο } AB\\ E \text{ μέσο } A\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E = // \ \frac{B\Gamma}{2}$$

- Αν από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου διέρχεται ευθεία παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή θα διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς του τριγώνου.

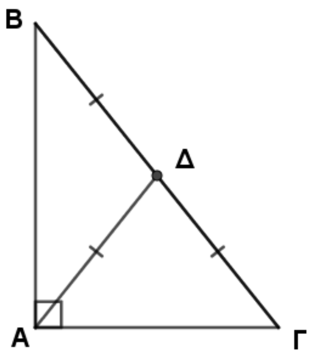


δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{r}\Delta \text{ μέσο } AB\\ \Delta E // B\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow E \text{ μέσο } A\Gamma$$

ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

- Σε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος που ξεκινά από την κορυφή της ορθής γωνίας του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

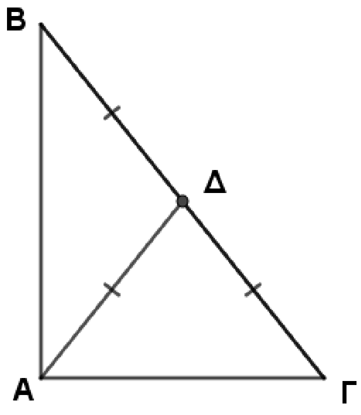


δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{r}AB\Gamma \text{ ορθογώνιο τρίγωνο}\\ A\Delta \text{ διάμεσος}\end{array}\right\} \Rightarrow A\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$$

$$(A\Delta = B\Delta = \Delta\Gamma)$$

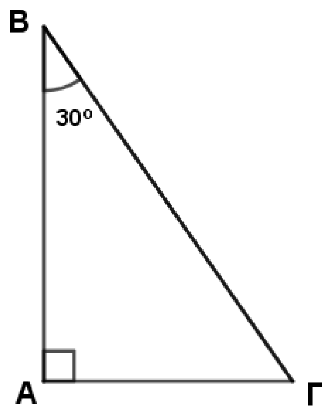
- Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.



δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{r}\text{Σε } AB\Gamma \text{ τρίγωνο}\\ A\Delta \text{ διάμεσος}\\ A\Delta = B\Delta = \Delta\Gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A} = 90°$$

- Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 300, τότε η κάθετη πλευρά του που βρίσκεται απέναντι από την γωνία των 300 είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

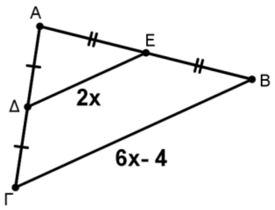


δηλαδή:

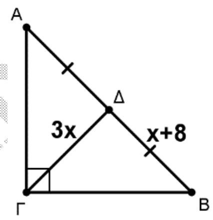
$$\left.\begin{array}{r}\text{ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο}\\ \widehat{\mathrm{B}} = 30°\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{ΑΓ} = \frac{\mathrm{ΒΓ}}{2}$$

1) Να βρείτε την τιμή του x και y σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

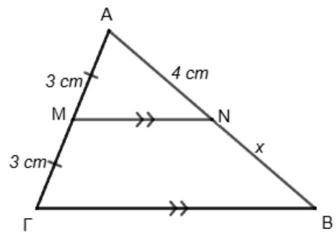
1)



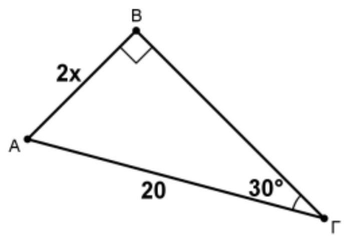
2)



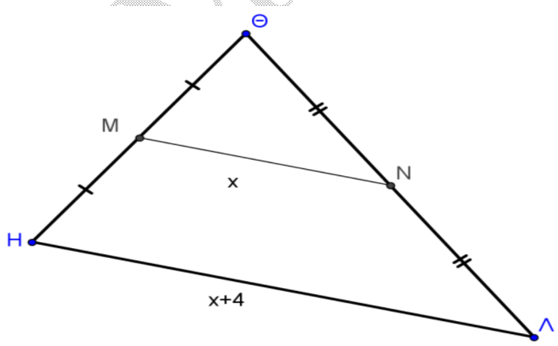
3)



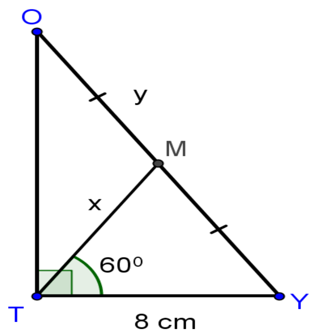
4)



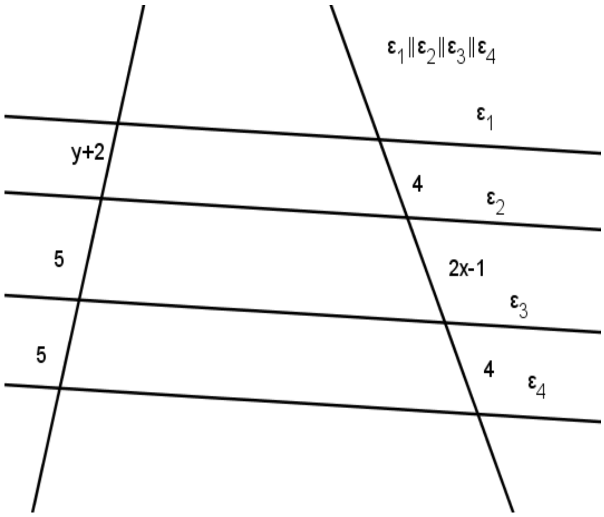
5)

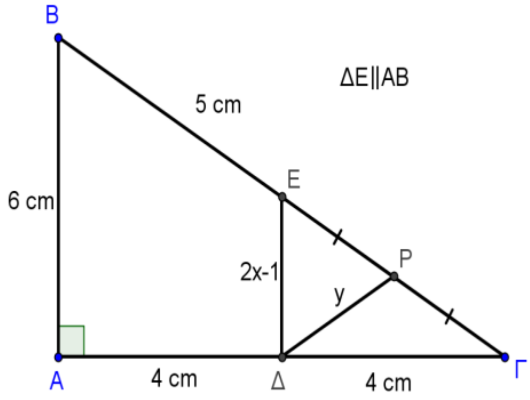


6)



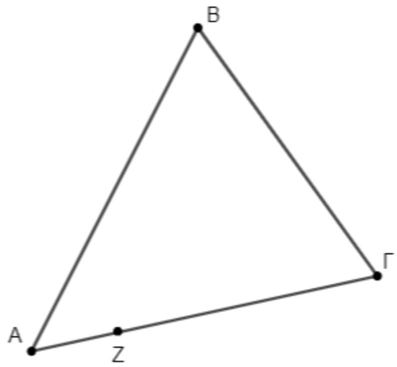
7)





8)

2) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Το Ζ είναι τυχαίο σημείο της ΑΓ και το Δ μέσο της ΓΖ. Προεκτείνουμε την ΒΔ κατά τμήμα ΔΕ = ΒΔ. Να δείξετε ότι το ΒΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.



3) Δίνονται τα σημεία $A(1,5)$, $B(5,2)$, $\Gamma(3,-2)$, $\Delta(-1,1)$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

4) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma(\hat{A}=90°)$. Αν τα σημεία Δ, E, Z είναι τα μέσα των πλευρών AB, $B\Gamma$, $A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $A\Delta EZ$ ορθογώνιο.

5) Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη $\Delta\Gamma$ (προς το μέρος του Γ) κατά τμήμα $\Gamma E = \Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

6) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών AB, $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta EZ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.