

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ενότητα 1: Πραγματικοί αριθμοί

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $(-2)^5 = -32$ β) $(-10)^3 = -1000$ γ) $-5^2 = -25$ δ) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
 ε) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ στ) $(-10)^{-2} = \left(-\frac{1}{10}\right)^2 = +\frac{1}{100}$ ζ) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ η) $\left(+\frac{3}{8}\right)^{-1} = \left(+\frac{8}{3}\right)^1 = \frac{8}{3}$
 θ) $\left(-\frac{4}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{4}\right)^2 = +\frac{49}{16}$ ι) $(-7+3)^{-2} = (-4)^{-2} = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = +\frac{1}{16}$ ια) $[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = +64$ ιβ) $2^6 \cdot 5^6 = (2 \cdot 5)^6 = 10^6 = 1000000$

2. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε μορφή μίας δύναμης ή γινομένου

δυνάμεων:

α) $x \cdot x = x^2$	β) $\psi^7 \div \psi^3 = \psi^4$	γ) $(-5)^7 \div (-5)^{-2} = (-5)^{7-(-2)} = (-5)^{7+2} = (-5)^9$
δ) $(4 \cdot 4^8) \div 4^3 = 4^9 \div 4^3 = 4^6$	ε) $(3^6 \cdot \frac{1}{81} \cdot 9) \div 3^{-5} = (3^6 \cdot 3^{-4} \cdot 3^2) \div 3^{-5} = 3^{6-4+2-(-5)} = 3^{6-4+2+5} = 3^9$	στ) $(-7)^4 \cdot (+7)^5 \cdot (+7) = (+7^4) \cdot (+7)^5 \cdot (+7)^1 = (+7)^{4+5+1} = (+7)^{10}$
ζ) $(-5)^{-3} \cdot (+5)^{-4} \div \left(-\frac{1}{5}\right)^5 = (-5)^{-3} \cdot (-5)^{-4} \div (-5)^{-5} = (-5)^{-3-4-(-5)} = (-5)^{-3-4+5} = (-5)^{-2} = (-5)^{-2}$	η) $(\beta^3)^4 = \beta^{12}$	θ) $[(-11)^4]^6 = (-11)^{24}$
ι) $(-8) \cdot 4^{-3} \cdot \frac{1}{16} \cdot (-2)^5 = (-2)^3 \cdot [(-2)^2]^{-3} \cdot (-2)^{-4} \cdot (-2)^5 = (-2)^3 \cdot (-2)^{-6} \cdot (-2)^{-4} \cdot (-2)^5 = (-2)^{3-6-4+5} = (-2)^{-2}$	ια) $[(-2)^3 \cdot (-2)^8]^{-2} = [(-2)^{11}]^{-2} = (-2)^{-22}$	ιβ) $\frac{(a^3)^5 \cdot a^3}{a^{-6}} = \frac{a^{15} \cdot a^3}{a^{-6}} = \frac{a^{18}}{a^{-6}} = a^{18-(-6)} = a^{18+6} = a^{24}$
ιγ) $(\alpha^{-5} \cdot \beta^2)^3 = \alpha^{-15} \cdot \beta^6$	ιδ) $(x^{-5} \cdot \psi^3 \cdot \omega^2)^{-2} = x^{+10} \cdot \psi^{-6} \cdot \omega^{-4}$	ιε) $2 \cdot (5^3)^7 \cdot 5^{-18} + 3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 5^{21} \cdot 5^{-18} + 3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 5^{21-18} + 3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^3 = 5 \cdot 5^3 = 5^4$
ιστ) $2^2 \cdot 2^5 + 3 \cdot (2^5)^2 \cdot 2 \div 2^4 = 2^7 + 3 \cdot 2^{10} \cdot 2 \div 2^4 = 2^7 + 3 \cdot 2^{10+1-4} = 2^7 + 3 \cdot 2^7 = (1+3) \cdot 2^7 = 4 \cdot 2^7 = 2^2 \cdot 2^7 = 2^9$	ιζ) $9 \cdot 3^{-1} \cdot 27 + 2 \cdot (3^2)^2 = 3^2 \cdot 3^{-1} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^4 = 3^{2-1+3} + 2 \cdot 3^4 = 3^4 + 2 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3^4 = 3^5$	
ιη) $8 \cdot 3^{13} \div 3^7 + 4 \cdot (3^{-2})^{-3} - 2 \cdot 3^4 \div 3^{-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-6} = 8 \cdot 3^{13-7} + 4 \cdot 3^6 - 2 \cdot 3^{4-(-2)} - 3^6 = 8 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^6 - 2 \cdot 3^{4+2} - 3^6 = 8 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^6 - 2 \cdot 3^6 - 3^6 = (8+4-2-1) \cdot 3^6 = 9 \cdot 3^6 = 3^2 \cdot 3^6 = 3^8$		

3. Να υπολογίσετε με χρήση εξίσωσης την τιμή της μεταβλητής x .

α) $(5^3)^x \div 5^6 = 1$

$$5^{3x} : 5^6 = 5^0$$

$$5^{3x-6} = 5^0$$

$$3x - 6 = 0$$

$$3x = 0 + 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=2}$$

β) $[(-2)^x \cdot (-2)^4]^3 = (-2)^{27}$

$$[(-2)^{x+4}]^3 = (-2)^{27}$$

$$(-2)^{3x+12} = (-2)^{27}$$

$$3x + 12 = 27$$

$$3x = 27 - 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \Leftrightarrow \boxed{x=5}$$

4. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

α) $4 - 3 \cdot 5^2 + 10^2 - 9 \cdot (-2)^3 + 2021^0 = 4 - 3 \cdot 25 + 100 - 9 \cdot (-8) + 1$
 $= 4 - 75 + 100 + 72 + 1$
 $= +177 - 75 = +102$

β) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + 8^0 - 1^{32} + \left(-\frac{1}{5}\right)^{-2} = (-2)^3 + 1 - 1 + (-5)^2$
 $= (-8) + 1 - 1 + (+25) = -8 + 1 - 1 + 25 = +17$

γ) $(+4)^{15} : (+4)^{14} - (-5)^{-2} \cdot (-5)^2 + \left(-\frac{1}{8}\right)^7 \cdot (-8)^7 =$
 $= (+4)^1 - (-5)^{-2+2} + (-8)^{-7} \cdot (-8)^7$
 $= (+4) - (-5)^0 + (-8)^{-7+7}$
 $= (+4) - (+1) + (-8)^0$
 $= (+4) - (+1) + (+1) = +4 - 1 + 1 = +4$

5. Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 5$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \alpha^{-2} - \alpha \cdot \beta + 3 \cdot (\alpha + \beta)^{-1}$$

$$= (-2)^{-2} - (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-2 + 5)^{-1}$$

$$= (-2)^{-2} - (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (+3)^{-1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-2) \cdot 5 + 3 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)^1$$

$$= \left(+\frac{1}{4}\right) - (-2) \cdot 5 + 3 \cdot \left(+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(+\frac{1}{4}\right) + 10 + 1 = +\frac{1}{4} + 10 + 1 = +11\frac{1}{4}$$

6. Να υπολογίσετε τους αριθμούς :

$$\alpha) \sqrt{16} = 4 \quad \beta) \sqrt{81} = 9 \quad \gamma) \sqrt[3]{8} = 2 \quad \delta) \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \epsilon) \sqrt{160000} = 400$$

$$\sigma\tau) \sqrt{4900} = 70 \quad \zeta) \sqrt{1,21} = 1,1 \quad \eta) \sqrt[3]{64} = 4 \quad \theta) \sqrt{(-29)^2} = 29 \quad \iota) \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$$

$$\kappa\alpha) (\sqrt[3]{19})^3 = 19 \quad \kappa\beta) \sqrt[3]{1000} = 10 \quad \kappa\gamma) \sqrt[3]{0,008} = 0,2 \quad \kappa\delta) \sqrt{1,44} = 1,2 \quad \kappa\epsilon) \sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$\alpha) \sqrt{7 + \sqrt[3]{8}} = \sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\beta) \sqrt[3]{125} + \sqrt{(-5)^2} + \sqrt[3]{5^3} = 5 + 5 + 5 = 15$$

$$\gamma) \sqrt[3]{9+9+9} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\delta) \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7+2}}} = \sqrt{21 + \sqrt{13+3}} = \sqrt{21 + \sqrt{16}} = \sqrt{21+4} = \sqrt{25} = 5$$

$$\epsilon) 3(\sqrt{7})^2 + \sqrt[3]{125} - 2\sqrt{9} = 3 \cdot 7 + 5 - 2 \cdot 3 = 21 + 5 - 6 = 26 - 6 = 20$$

$$\sigma\tau) \sqrt{80 + \sqrt[3]{7 - \sqrt{36}}} = \sqrt{80 + \sqrt[3]{7-6}} = \sqrt{80 + \sqrt[3]{1}} = \sqrt{80+1} = \sqrt{81} = 9$$

$$\zeta) \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$$

$$\eta) \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta) \frac{\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{18 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\iota) \sqrt[3]{2^3 \cdot 4^3} = \sqrt[3]{(2 \cdot 4)^3} = \sqrt[3]{8^3} = 8$$

$$\kappa\alpha) (3\sqrt{20})(4\sqrt{5}) = 12 \cdot \sqrt{20 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{100} = 12 \cdot 10 = 120$$

$$\kappa\beta) \sqrt{2}(\sqrt{18} - \sqrt{72}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{72} = \sqrt{2 \cdot 18} - \sqrt{2 \cdot 72} = \sqrt{36} - \sqrt{144} = 6 - 12 = -6$$

$$\kappa\gamma) \sqrt{24} \div \sqrt{6} - \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt{24:6} - \sqrt[3]{16 \cdot 4} = \sqrt{4} - \sqrt[3]{64} = 2 - 4 = -2$$

$$\kappa\delta) \sqrt[3]{\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{32} + (-3)^2} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{500}{5}} + \sqrt{2 \cdot 32} + 9} = \sqrt[3]{\sqrt{100} + \sqrt{64} + 9} = \sqrt[3]{10 + 8 + 9} = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\kappa\epsilon) \frac{\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\frac{40}{5}}} = \frac{\sqrt{\frac{50}{2}}}{\sqrt[3]{\frac{40}{5}}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2}$$

8. Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 27$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{27\alpha} - (\sqrt{\alpha})^2 + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} \\ &= \sqrt{27 \cdot 3} - (\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{27} \\ &= \sqrt{81} - 3 + \sqrt{3 \cdot 27} \\ &= 9 - 3 + \sqrt{81} = 9 - 3 + 9 \\ &= 18 - 3 = 15 \end{aligned}$$

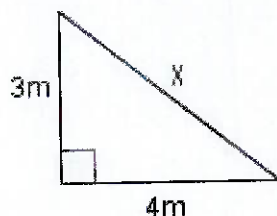
9. Αν $\alpha = -3$ και $\beta = -2$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της

παράστασης: $A = \frac{\alpha^3 + 5\alpha\beta - 2\beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(-3)^2 + 5 \cdot (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot (-2)^2}{\sqrt{(-3)^2 + 4 \cdot (-2)}} \\ &= \frac{+9 + 5 \cdot (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot (+4)}{\sqrt{+9 + 4(-2)}} \\ &= \frac{+9 + 30 - 8}{\sqrt{9 - 8}} = \frac{31}{\sqrt{1}} = \frac{31}{1} = 31 \end{aligned}$$

10. Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε την τιμή του x .

α)



$$\text{π.θ } (x)^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2$$

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

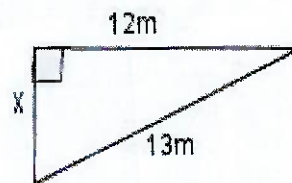
$$x^2 = 9 + 16$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$\boxed{x = 5\text{m}}$$

β)



$$\text{π.θ } (x)^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2$$

$$13^2 = 12^2 + x^2$$

$$169 = 144 + x^2$$

$$169 - 144 = x^2$$

$$25 = x^2$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$\boxed{x = 5\text{m}}$$

11. Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ στο διπλανό σχήμα:

$$\text{Π.Θ } (BG)^2 = (AB)^2 + (AG)^2$$

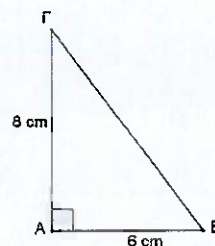
$$(BG)^2 = 6^2 + 8^2$$

$$(BG)^2 = 36 + 64$$

$$(BG)^2 = 100$$

$$(BG) = \sqrt{100}$$

$$(BG) = 10 \text{ cm}$$



12. Ένας άνθρωπος θέλει να αγοράσει το οικοπέδο του σχήματος. Αν το ένα τετραγωνικό μέτρο κοστίζει €900, πόσα χρήματα πρέπει να πληρώσει για την αγορά του οικοπέδου;

$$\text{Π.Θ } (YH)^2 = (K_1)^2 + (K_2)^2$$

$$15^2 = 12^2 + x^2$$

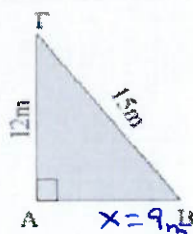
$$225 = 144 + x^2$$

$$225 - 144 = x^2$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \sqrt{81}$$

$$x = 9 \text{ m}$$



$$E = \frac{b \cdot v}{2}$$

$$E = \frac{9 \cdot 12}{2}$$

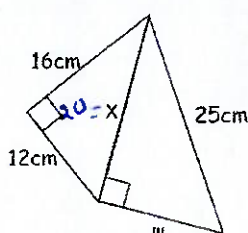
$$E = 54 \text{ m}^2$$

$$54 \cdot 900 = 48600$$

Αν Για την αγορά του οικοπέδου πρέπει να πληρώσει €48600

13. Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε τις τιμές των χ και ψ.

α)



$$\text{Π.Θ } x^2 = 16^2 + 12^2$$

$$x^2 = 256 + 144$$

$$x^2 = 400$$

$$x = \sqrt{400}$$

$$x = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Π.Θ } 25^2 = 20^2 + \psi^2$$

$$625 = 400 + \psi^2$$

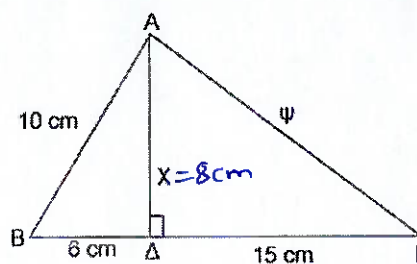
$$625 - 400 = \psi^2$$

$$\psi^2 = 225$$

$$\psi = \sqrt{225}$$

$$\psi = 15 \text{ cm}$$

β)



$$\text{Π.Θ : } 10^2 = 6^2 + x^2$$

$$100 = 36 + x^2$$

$$100 - 36 = x^2$$

$$x^2 = 64$$

$$x = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Π.Θ : } \psi^2 = 8^2 + 15^2$$

$$\psi^2 = 64 + 225$$

$$\psi^2 = 289$$

$$\psi = \sqrt{289}$$

$$\psi = 17 \text{ cm}$$

14. Αν $\alpha = \sqrt{3 - \sqrt{7 - \sqrt{9}}}$, $\beta = \sqrt{\sqrt{81}}$ και $\gamma = \sqrt{9 - \sqrt{21 + \sqrt{16}}}$

τότε: α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β, γ .

$$\alpha = \sqrt{3 - \sqrt{7 - \sqrt{9}}} = \sqrt{3 - \sqrt{7 - 3}} = \sqrt{3 - \sqrt{4}} = \sqrt{3 - 2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\beta = \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{\sqrt{9}} = \sqrt{3}$$

$$\gamma = \sqrt{9 - \sqrt{21 + \sqrt{16}}} = \sqrt{9 - \sqrt{21 + 4}} = \sqrt{9 - \sqrt{25}} = \sqrt{9 - 5} = \sqrt{4} = 2$$

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι ορθογώνιο.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 = 1^2 = 1 \\ \beta^2 = \sqrt{3}^2 = 3 \\ \gamma^2 = 2^2 = 4 \end{array} \right\} 1+3=4 \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{Ισχύει το Π.Θ} \\ \Rightarrow \text{Ορθογώνιο τρίγωνο}$$

15. Να χαρακτηρίσετε με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις πιο κάτω προτάσεις :

α) Αν χ, ψ, ζ είναι οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και ισχύει $\chi^2 = \psi^2 - \zeta^2$, τότε η πλευρά ψ είναι η υποτείνουσα. **Σωστό**

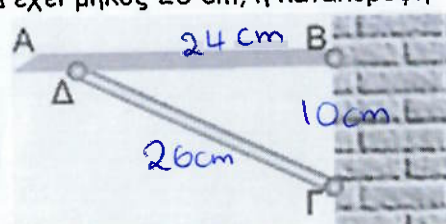
β) Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{B} = 90^\circ$, τότε $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$. **Λάθος**

γ) Ισχύει $\sqrt{(-\chi)^2} = |\chi|$ για οποιοδήποτε ρητό χ . **Σωστό**

δ) Ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ όταν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$. **Λάθος**

ε) Ισχύει $(10\sqrt{2})^2 = 200$. **Σωστό**

16. Ένας μαθητής δίπλα από το γραφείο του στον κατακόρυφο τοίχο, τοποθέτησε ένα ράφι με μεταλλικό στήριγμα για να βάλει επάνω την κεντρική μονάδα του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αν το στήριγμα $\Gamma\Delta$ έχει μήκος 26 cm, η κατακόρυφη απόσταση $B\Gamma$ είναι 10 cm και τα σημεία B, Δ απέχουν 24 cm, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



$$\begin{aligned} (AB)^2 &= 24^2 = 576 \\ (B\Gamma)^2 &= 10^2 = 100 \\ (\Delta\Gamma)^2 &= 26^2 = 676 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 576 + 100 = 676$$

$$(AB)^2 + (B\Gamma)^2 = (\Delta\Gamma)^2$$

Ισχύει το Π.Θ

$\Rightarrow \angle B\hat{\Delta}\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο

$\Rightarrow$ Το ράφι είναι οριζόντιο

17. Να βάλετε x ή $\checkmark$ στην κατάλληλη στήλη

Αριθμός	Φυσικός $\mathbb{N}$	Ακέραιος $\mathbb{Z}$	Ρητός $\mathbb{Q}$	Άρρητος $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$	Πραγματικός $\mathbb{R}$
7	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$		$\checkmark$
1,25			$\checkmark$		$\checkmark$
$-\sqrt{9} = -3$		$\checkmark$	$\checkmark$		$\checkmark$
$\sqrt{6}$				$\checkmark$	$\checkmark$
$\frac{12}{7}$			$\checkmark$		$\checkmark$

Ενότητα 2: Αλγεβρικές παραστάσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα :

α) $5x + 3\psi$, β) $5x^2\psi$, γ) $4x^3 - 2x + \psi$, δ) $\frac{3}{2}x\psi^3\omega^5$, ε) $6\psi^3 + 3x\omega$

παντού πολλαπλός με εκθέτες μη αρητικούς

2. Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο Μέρος	Βαθμός
$-2\beta^3\psi^2$	-2	$\beta^3\psi^2$	$3+2=5^{\text{ου}}$
$\frac{\alpha\gamma^7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\alpha\gamma^7$	$1+7=8^{\text{ου}}$
$-5a^5b$	-5	a^5b	$5+1=6^{\text{ου}}$

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε έκφραση της πρώτης στήλης με μια της δεύτερης στήλης:

1η Στήλη	2η Στήλη
1) $x(x+2)$	α) $x^2 - 2x$
2) $(x+2)(x-2)$	β) $x^2 + 2$
3) $x(x-2)$	γ) $x^2 + 4x + 4$
4) $(x+2)(2+x)$	δ) $x^2 + 2x$
5) $(x+2)(x+1)$	ε) $x^2 - 4$
	ζ) $x^2 + 3x + 3$
	η) $x^2 + 3x + 2$

1.	2.	3.	4.	5.
δ	ε	α	γ	η

4. Να κάνετε τις πράξεις :

α) $\underline{-14x} + \underline{6a} + \underline{5x} - \underline{2a} = \underline{-9x + 4a}$

β) $\underline{2x\psi} - \underline{8x^2} + \underline{5x^2} - \underline{x\psi} = \underline{x\psi - 3x^2}$

γ) $3x + (4x - \psi) + (2\psi - 5x) = \underline{3x + 4x - \psi + 2\psi - 5x} = \underline{2x + 3\psi}$

δ) $x \cdot (x^2 - 2x + 2) = \underline{x^3 - 2x^2 + 2x}$

ε) $(-5a^4 + 2a - 3)(-2a^2) =$
 $\underline{= 10a^6 - 4a^3 + 6a^2}$

στ) $-\frac{1}{2}x \cdot (-4x\psi + 28x^{28} - 12) =$
 $= -\frac{1}{2}x \cdot (-4x\psi) - \frac{1}{2}x \cdot 28x^{28} - \frac{1}{2}x \cdot (-12)$
 $= \underline{+2x^2\psi - 14x^{29} + 6x}$

$$\zeta) (x-1)(x-5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5$$

$$\eta) (x+1)(2x-3) = 2x^2 - 3x + 2x - 3$$

$$\theta) (1-3x)(x^2+x+4) = x^2+x+4 - 3x^3 - 3x^2 - 12x = -3x^3 - 2x^2 - 11x + 4$$

$$\iota) (x+1)(x-1)(x+3) = (x^2-1)(x+3) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$\kappa) (8x^2 - 14x + 4x^4) : (-2x) = -4x + 7 - 2x^3$$

$$\lambda) \frac{5x\psi^2 - 4x^3\psi}{x\psi} = \frac{5x\psi^2}{x\psi} - \frac{4x^3\psi}{x\psi} = 5\psi - 4x^2$$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) 5a^2b^3 - (4a^2 - 3b^3a^2) + 2a^2 = 5a^2b^3 - 4a^2 + 3b^3a^2 + 2a^2 = 8a^2b^3 - 2a^2$$

$$\gamma) (a^2 - 3)(a - 2) - (a + 5)(2a - 3) = a^3 - 2a^2 - 3a + 6 - (2a^2 - 3a + 10a - 15) = a^3 - 2a^2 - 3a + 6 - 2a^2 + 3a - 10a + 15 = a^3 - 4a^2 - 10a + 21$$

$$\epsilon) 16x\psi(x^2 - \psi) - (32x^4\psi^2) \div (8x\psi) - x(4\psi)^2 = 16x^3\psi - 16x\psi^2 - 4x^3\psi - x(16\psi^2) = 16x^3\psi - 16x\psi^2 - 4x^3\psi - 16x\psi^2 = 12x^3\psi - 32x\psi^2$$

$$\sigma) 2x(3x - 2\psi) - (4x + \psi)(-3x\psi) - 2(x^2 - 2\psi^2) = 6x^2 - 4x\psi - (-12x^2\psi - 3x\psi^2) - 2x^2 + 4\psi^2 = 6x^2 - 4x\psi + 12x^2\psi + 3x\psi^2 - 2x^2 + 4\psi^2 = 4x^2 - 4x\psi + 12x^2\psi + 3x\psi^2 + 4\psi^2$$

6. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) (x^2 + 7x + 12) \div (x + 3)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 7x + 12 & x + 3 \\ -x^2 - 3x & x + 4 \\ \hline 4x + 12 & \\ -4x - 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\beta) (x^2 - 10x + 20) \div (x - 5)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 10x + 20 & x - 5 \\ -x^2 + 5x & x - 5 \\ \hline -5x + 20 & \\ +5x - 25 & \\ \hline -5 & \end{array}$$

τέλεια διαίρεση

$$\gamma) \frac{x^2-6x+8}{x-2} = (x^2-6x+8):(x-2) \quad (4x^2+9-12x):(2x-3)$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-6x+8 & x-2 \\ -x^2+2x & x-4 \\ \hline -4x+8 & \\ +4x-8 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4x^2-12x+9 & 2x-3 \\ -4x^2+6x & 2x-3 \\ \hline -6x+9 & \\ +6x-9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

7. Ο ένας παράγοντας του πολυώνυμου $2x^2+7x-15$ είναι το $2x-3$. Να βρείτε τον άλλο παράγοντα.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+7x-15 & 2x-3 \\ -2x^2+3x & x+5 \\ \hline +10x-15 & \\ -10x+15 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ο άλλος παράγοντας είναι το $x+5$

8. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρεθεί με το $2\psi+4$ δίνει πηλίκο $2\psi^2-3\psi+5$ και αφήνει υπόλοιπο 3.

$$\delta = 2\psi+4$$

$$\pi = 2\psi^2-3\psi+5$$

$$\upsilon = 3$$

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$

$$\Delta = (2\psi+4)(2\psi^2-3\psi+5) + 3$$

$$\Delta = 4\psi^3 - 6\psi^2 + 10\psi + 8\psi^2 - 12\psi + 20 + 3$$

$$\Delta = 4\psi^3 + 2\psi^2 - 2\psi + 23$$

9. Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

α) $(a+1)^2 - a(a+2) = 1$

$$\begin{aligned} \text{Α' Μέλος} &= (a+1)^2 - a(a+2) \\ &= (a+1)(a+1) - a(a+2) \\ &= a^2 + a + a + 1 - a^2 - 2a \\ &= +1 = \text{Β' Μέλος} \end{aligned}$$

β) $(x+\psi)^2 - (x-\psi)^2 = 4x\psi$

$$\begin{aligned} \text{Α' Μέλος} &= (x+\psi)^2 - (x-\psi)^2 \\ &= (x+\psi)(x+\psi) - (x-\psi)(x-\psi) \\ &= x^2 + x\psi + x\psi + \psi^2 - (x^2 - x\psi - x\psi + \psi^2) \\ &= x^2 + x\psi + x\psi + \psi^2 - x^2 + x\psi + x\psi - \psi^2 = 4x\psi \\ &= \text{Β' Μέλος} \end{aligned}$$

γ) $(x+\psi)^2 - (x-\psi)(x+\psi) = 2\psi(x+\psi)$ δ) $(2a-3)^2 - 4a(a-3) - a^2 = (3-a)(3+a)$

$$\begin{aligned} \text{Α' Μέλος} &= (x+\psi)^2 - (x-\psi)(x+\psi) \\ &= (x+\psi)(x+\psi) - (x^2 - x\psi - x\psi + \psi^2) \\ &= x^2 + x\psi + x\psi + \psi^2 - x^2 + x\psi + x\psi - \psi^2 \\ &= 2x\psi + 2\psi^2 \end{aligned}$$

$$\text{Β' Μέλος} = 2\psi(x+\psi) = 2x\psi + 2\psi^2$$

$$\text{Α' Μέλος} = \text{Β' Μέλος}$$

$$\begin{aligned} \text{Α' Μέλος} &= (2a-3)^2 - 4a(a-3) - a^2 \\ &= (2a-3)(2a-3) - 4a^2 + 12a - a^2 \\ &= 4a^2 - 6a - 6a + 9 - 4a^2 + 12a - a^2 \\ &= 9 - a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Β' Μέλος} = (3-a)(3+a)$$

$$= 9 + 3a - 3a - a^2$$

$$= 9 - a^2$$

$$\text{Α' Μέλος} = \text{Β' Μέλος}$$

10. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A : $A = (x+3)^2 - (3x-2)(3x+2)$

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης A αν $x = 2$

$$\alpha) A = (x+3)^2 - (3x-2)(3x+2) = (x+3)(x+3) - (9x^2+6x-6x-4) \\ = \underline{x^2+3x+3x+9} - \underline{9x^2-6x-6x-4} = -8x^2+6x+13$$

$$\beta) A = -8 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 13 \\ = -8 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 13 \\ = -32 + 12 + 13 \\ = -32 + 25 = -7$$

11. Δίνονται τα πολυώνυμα: $A = 2x^2 - 9x + 4$, $B = x + 3$ και $\Gamma = 2x - 1$

Να υπολογίσετε:

$$\alpha) A + B - \Gamma = (2x^2 - 9x + 4) + (x + 3) - (2x - 1) \\ = \underline{2x^2 - 9x + 4} + \underline{x + 3} - \underline{2x + 1} = 2x^2 - 10x + 8$$

$$\beta) B^2 - 2x \cdot \Gamma = (x+3)^2 - 2x \cdot (2x-1) \\ = (x+3)(x+3) - 4x^2 + 2x \\ = \underline{x^2+3x+3x+9} - \underline{4x^2+2x} \\ = -3x^2 + 8x + 9$$

$$\gamma) A \div \Gamma = (2x^2 - 9x + 4) : (2x - 1)$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 9x + 4 & 2x - 1 \\ -2x^2 + x & x - 4 \\ \hline -8x + 4 & \\ +8x - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

12. Δίνονται τα πολυώνυμα: $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, $q(x) = 2x^2 + 5x - 3$ και

$r(x) = 2x - 1$. Να υπολογίσετε:

$$\alpha) p(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 3(-2) - 1 \\ = -8 + 2 \cdot (+4) - 3(-2) - 1 \\ = -8 + 8 + 6 - 1 = +5$$

$$\gamma) r(x) \cdot q(x) = (2x-1)(2x^2+5x-3) \\ = 4x^3 + 10x - 6x - 2x^2 - 5x + 3 \\ = 4x^3 - 2x^2 - x + 3$$

$$\beta) p(x) - q(x) + 4 \cdot r(x)$$

$$= (x^3 + 2x^2 - 3x - 1) - (2x^2 + 5x - 3) + 4(2x - 1) \\ = \underline{x^3 + 2x^2 - 3x - 1} - \underline{2x^2 + 5x - 3} + \underline{8x - 4} \\ = x^3 - 2$$

$$\delta) q(x) \div r(x) =$$

$$= (2x^2 + 5x - 3) : (2x - 1) \\ \begin{array}{r|l} 2x^2 + 5x - 3 & 2x - 1 \\ -2x^2 + x & x + 3 \\ \hline +6x - 3 & \\ -6x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

13. Δίνονται τα πολυώνυμα $p(x) = x^2 - 3x$ και $r(x) = 4x - 3$.

Να βρείτε: α) $p(x) - r(x) = (x^2 - 3x) - (4x - 3)$

$$= x^2 - 3x - 4x + 3$$

$$= x^2 - 7x + 3$$

$$\beta) p(-1) + r(2) = 4 + 5 = 9$$

$$p(-1) = (-1)^2 - 3(-1) \quad r(2) = 4 \cdot 2 - 3$$

$$= +1 + 3$$

$$= 8 - 3$$

$$= +4$$

$$= 5$$

$$\gamma) 2p(x) - x \cdot r(x) = 2 \cdot (x^2 - 3x) - x(4x - 3)$$

$$= 2x^2 - 6x - 4x^2 + 3x$$

$$= -2x^2 - 3x$$

14. Δίνονται τα μονώνυμα $A = \frac{1}{4}x^6\psi^5$ και $B = -\frac{1}{2}x^4\psi^2$

α) Να βρείτε το πηλίκο $\frac{A}{B}$.

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{4}x^6\psi^5}{-\frac{1}{2}x^4\psi^2} = -\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}x^{6-4}\psi^{5-2} = -\frac{1}{2}x^2\psi^3$$

β) Αν το μονώνυμο $8x^{\mu-3}\psi^{2\lambda+1}$ είναι όμοιο με το πιο πάνω πηλίκο να βρείτε τις τιμές των μ και λ .

$$\mu - 3 = 2$$

$$2\lambda + 1 = 3$$

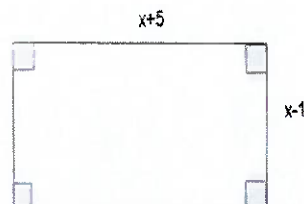
$$\mu = 2 + 3$$

$$2\lambda = 3 - 1$$

$$\mu = 5$$

$$\frac{2\lambda}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

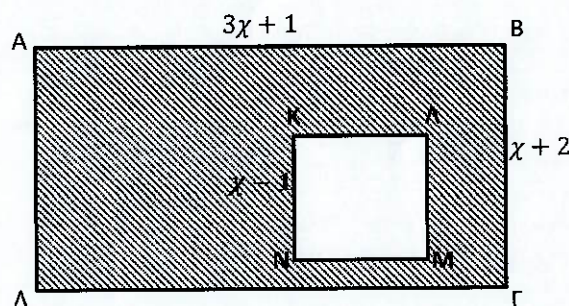
15. Να βρείτε τα πολυώνυμα $E(x)$ και $\Pi(x)$ τα οποία εκφράζουν το εμβαδόν και την περίμετρο του πιο κάτω ορθογωνίου.



$$\begin{aligned} E(x) &= (x+5) \cdot (x-1) \\ &= x^2 - x + 5x - 5 \\ &= x^2 + 4x - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= 2 \cdot (x+5) + 2 \cdot (x-1) \\ &= 2x + 10 + 2x - 2 \\ &= 4x + 8 \end{aligned}$$

16. Στο πιο κάτω σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο με διαστάσεις $(3χ + 1)$ και $(χ + 2)$ και το $ΚΛΜΝ$ είναι τετράγωνο με πλευρά $(χ - 1)$.



- α) Να βρείτε και να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το εμβαδόν:

(i) του ορθογωνίου $ΑΒΓΔ$

$$Ε_{ΑΒΓΔ} = (3χ + 1)(χ + 2) = 3χ^2 + 6χ + χ + 2 = 3χ^2 + 7χ + 2$$

(ii) του τετραγώνου $ΚΛΜΝ$

$$Ε_{ΚΛΜΝ} = (χ - 1) \cdot (χ - 1) = χ^2 - χ - χ + 1 = χ^2 - 2χ + 1$$

(iii) της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας

$$\begin{aligned} Ε_{\text{σκιμ.}} &= Ε_{ΑΒΓΔ} - Ε_{ΚΛΜΝ} = (3χ^2 + 7χ + 2) - (χ^2 - 2χ + 1) \\ &= 3χ^2 + 7χ + 2 - χ^2 + 2χ - 1 = 2χ^2 + 9χ + 1 \end{aligned}$$

- β) Αν $χ = 4\text{cm}$, να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.

$$\begin{aligned} Ε_{\text{σκιμ.}} &= 2 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 + 1 \\ &= 2 \cdot 16 + 9 \cdot 4 + 1 \\ &= 32 + 36 + 1 \\ &= \underline{\underline{69\text{cm}^2}} \end{aligned}$$

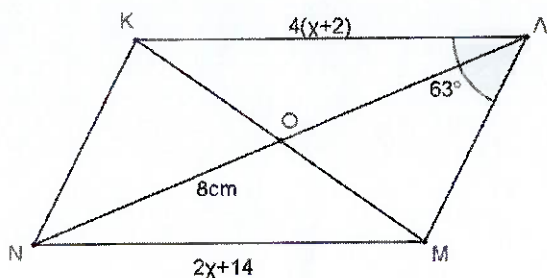
Ενότητα 3: Γεωμετρία

1. Σε κάθε σχήμα της στήλης Α να αντιστοιχίσετε τη σωστή ιδιότητα που αναγράφεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1) Παραλληλόγραμμο	α) Οι διαγώνιοι είναι άνισες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται
2) Ορθογώνιο	β) Οι διαγώνιοι είναι ίσες, τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται
3) Ρόμβος	γ) Οι διαγώνιοι είναι άνισες και διχοτομούνται
4) Τετράγωνο	δ) Οι διαγώνιοι είναι ίσες και διχοτομούνται

1.	2.	3.	4.
γ	δ	α	β

2. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ με $ΚΛ=4(x+2)$, $ΜΝ=2x+14$, $ΝΟ=8\text{cm}$ και $\widehat{ΚΛΜ}=63^\circ$. Να βρείτε τα ακόλουθα δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας
- την τιμή του x
 - το μέτρο της γωνίας $\widehat{ΛΜΝ}$
 - το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΛ.



$$\begin{aligned}
 &ΚΛ = ΜΝ \\
 &4(x+2) = 2x+14 \Rightarrow \\
 &4x+8 = 2x+14 \Rightarrow 4x-2x=14-8 \\
 &\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow \boxed{x=3}
 \end{aligned}$$

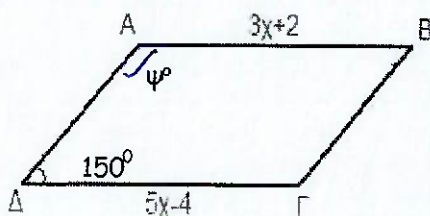
$$\begin{aligned}
 &\widehat{ΛΜΝ} + \widehat{ΚΛΜ} = 180^\circ \text{ (επενός επί τ'αυτῶν)} \\
 &\widehat{ΛΜΝ} = 180 - 63 = 117^\circ
 \end{aligned}$$

$$\text{ΟΟ} = \text{ΟΝ} = 8\text{cm} \text{ (οι διαγώνιοι διχοτομούνται)}$$

3. Στα πιο κάτω τετράπλευρα να υπολογίσετε τα χ , ψ , φ και ω .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο



$$AB = AD$$

$$3x+2 = 5x-4 \Rightarrow$$

$$3x-5x = -4-2 \Rightarrow$$

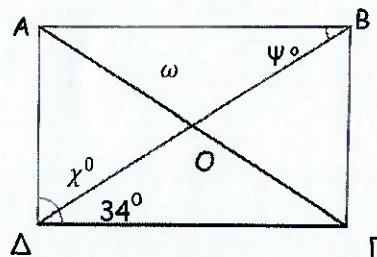
$$-2x = -6 \Rightarrow x = 3$$

$$y + 150 = 180$$

$$y = 180 - 150$$

$$y = 30^\circ$$

β) ΑΒΓΔ ορθογώνιο



$$AG = 10 \text{ cm}$$

Αφού $AG = 10 \Rightarrow AO = OG = 5 \text{ cm}$
(οι διαγώνιοι διχοτομούνται)

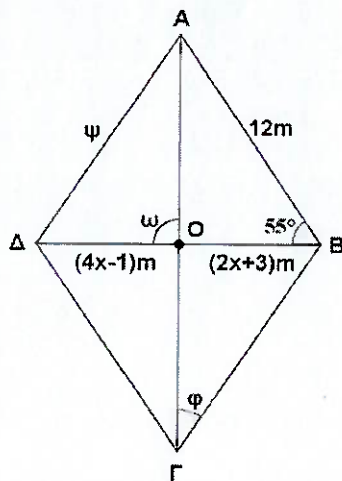
$$\hat{y} = 34^\circ \text{ (εντός εναρτηράς)}$$

$$ABD : x + 90 + y = 180$$

$$x = 180 - 90 - 34$$

$$x = 56^\circ$$

γ) ΑΒΓΔ ρόμβος



$\hat{\omega} = 90^\circ$ (οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα)

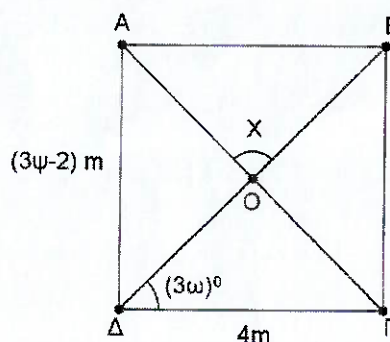
$$4x-1 = 2x+3 \text{ (οι διαγώνιοι διχοτομούνται)}$$

$$4x-2x = 3+1$$

$$2x = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ m}$$

$$y = 12 \text{ m (ότι οι πλευρές ίσες)}$$

δ) ΑΒΓΔ τετράγωνο



$\hat{x} = 90^\circ$ (γιατί οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα)

$\frac{3\omega}{3} = 45^\circ$ (γιατί οι διαγώνιοι διχοτομούν την ορθή) $\Rightarrow \hat{\omega} = 15^\circ$

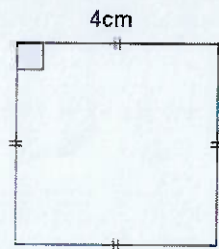
$$3y-2 = 4 \text{ (οι πλευρές είναι ίσες)}$$

$$3y = 4+2$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow y = 2 \text{ m}$$

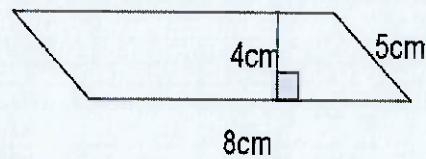
5. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο των πιο κάτω σχημάτων.

α)



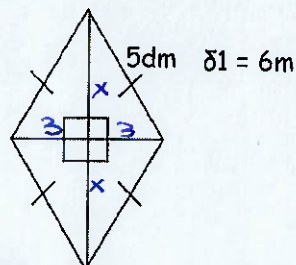
$$\begin{aligned} E &= a^2 \\ E &= 4^2 \\ E &= \underline{\underline{16\text{cm}^2}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \pi &= 4 \cdot a \\ \pi &= 4 \cdot 4 \\ \pi &= \underline{\underline{16\text{cm}}} \end{aligned}$$

β)



$$\begin{aligned} E &= b \cdot v \\ E &= 8 \cdot 4 \\ E &= \underline{\underline{32\text{cm}^2}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \pi &= 2a + 2b \\ \pi &= 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \\ \pi &= 16 + 10 \\ \pi &= \underline{\underline{26\text{cm}}} \end{aligned}$$

γ)

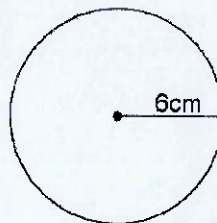


$$\begin{aligned} \text{η.Θ } (h)^2 &= (k_1)^2 + (k_2)^2 \\ 5^2 &= x^2 + 3^2 \\ 25 &= x^2 + 9 \\ x^2 &= 25 - 9 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \sqrt{16} \\ x &= \underline{\underline{4\text{m}}} \end{aligned}$$

$$\delta_2 = 8\text{cm}$$

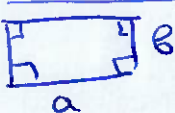
$$\begin{aligned} E &= \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} \\ E &= \frac{6 \cdot 8}{2} \\ E &= \underline{\underline{24\text{m}^2}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \pi &= 4a \\ \pi &= 4 \cdot 5 \\ \pi &= \underline{\underline{20\text{m}}} \end{aligned}$$

δ)



$$\begin{aligned} E &= \pi \cdot R^2 \\ E &= \pi \cdot 6^2 \\ E &= \underline{\underline{36\pi\text{cm}^2}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \pi &= 2\pi R \\ \pi &= 2\pi \cdot 6 \\ \pi &= \underline{\underline{12\pi\text{cm}}} \end{aligned}$$

6. Ορθογώνιο έχει περίμετρο 32 cm. Αν το μήκος του είναι τριπλάσιο του πλάτους του, να βρείτε το εμβαδόν του.

Σχήμα	Δεδομένα	Ζητούμενα
	$\pi = 32 \text{ cm}$ $a = 3x$ $b = x$	$E = ?$

$$\pi = 2a + 2b$$

$$32 = 2 \cdot 3x + 2 \cdot x$$

$$32 = 6x + 2x$$

$$\frac{32}{8} = \frac{8x}{8} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

$$a = 3x$$

$$a = 3 \cdot 4$$

$$a = 12 \text{ cm}$$

$$b = x$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$E = a \cdot b$$

$$E = 12 \cdot 4$$

$$E = 48 \text{ cm}^2$$

7. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και το μήκος κύκλου με ακτίνα 8 cm.

Σχήμα	Δεδομένα	Ζητούμενα
	$R = 8 \text{ cm}$	$E = ?$ $\Gamma = ?$

$$E = \pi R^2$$

$$E = \pi \cdot 8^2 \Rightarrow E = 64\pi \text{ cm}^2$$

$$\Gamma = 2\pi R$$

$$\Gamma = 2\pi \cdot 8$$

$$\Gamma = 16\pi \text{ cm}$$

8. Δίνεται κύκλος με διάμετρο 20 dm. Να βρείτε:

- το μήκος του
 - το εμβαδόν του
 - το μήκος τόξου με επίκεντρη γωνία 45°
 - το εμβαδόν κυκλικού τομέα με επίκεντρη γωνία 120° .
- (να δώσετε τις απαντήσεις σας συναρτήσει του π)

Σχήμα	Δεδομένα	Ζητούμενα
	Διάμετρος = 20 dm	α) $\Gamma = ?$ β) $E = ?$ δ) $\gamma_{\mu=45^\circ} = ?$ ε) $E_{\kappa\tau\omicron\mu, \mu=120^\circ} = ?$

α) Διάμετρος = 20 dm $\Rightarrow R = \frac{20}{2} = 10 \text{ dm}$

$$\Gamma = 2\pi R$$

$$\Gamma = 2\pi \cdot 10$$

$$\Gamma = 20\pi \text{ dm}$$

β) $E = \pi R^2$

$$E = \pi \cdot 10^2$$

$$E = 100\pi \text{ dm}^2$$

δ) $\gamma_{\mu=45^\circ} = \frac{2\pi R \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$

$$\gamma = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 45}{360}$$

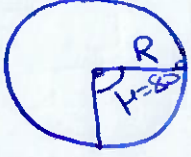
$$\gamma = \frac{5\pi}{2} \text{ dm}$$

ε) $E_{\kappa\tau\omicron\mu, \mu=120^\circ} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$

$$E_{\kappa\tau\omicron\mu} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 120}{360}$$

$$E_{\kappa\tau\omicron\mu} = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 120}{360} = \frac{100\pi}{3} \text{ dm}^2$$

9. Κύκλος έχει μήκος 18π m. Να βρείτε το εμβαδό του κυκλικού τομέα με επίκεντρη γωνία 80° .

Σχήμα	Δεδομένα	Ζητούμενα
	$\Gamma = 18\pi$ m $\mu = 80^\circ$	$E_{\text{τομ}} = ?$

$$\Gamma = 2\pi R$$

$$18\pi = 2\pi R$$

$$\frac{18}{2} = \frac{2R}{2}$$

$$\boxed{R = 9\text{ m}}$$

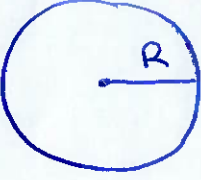
$$E_{\text{τομ}} = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ}$$

$$E_{\text{τομ}} = \pi \frac{9^2 \cdot 80}{360}$$

$$E_{\text{τομ}} = \pi \frac{81 \cdot 8}{36} = 18\pi$$

$$\boxed{E_{\text{τομ}} = 18\pi \text{ m}^2}$$

10. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα επίκεντρης γωνίας 36° ισούται με $5\pi \text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου στον οποίο ανήκει ο κυκλικός τομέας. Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π .

Σχήμα	Δεδομένα	Ζητούμενα
	$\mu = 36^\circ$ $E_{\text{τομ}} = 5\pi \text{ cm}^2$	$\Gamma = ?$

$$E_{\text{τομ}} = \frac{\pi R^2 \mu}{360^\circ}$$

$$5\pi = \frac{\pi R^2 \cdot 36}{360}$$

$$\frac{5}{1} = \frac{R^2}{10}$$

$$R^2 = 50$$

$$R = \sqrt{50}$$

$$R = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

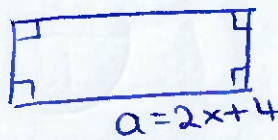
$$\Gamma = 2\pi R$$

$$\Gamma = 2\pi \cdot 5\sqrt{2}$$

$$\boxed{\Gamma = 10\sqrt{2}\pi \text{ cm}}$$

11. Ορθογώνιο έχει περίμετρο 44cm και είναι ισεμβαδικό με ρόμβο. Αν το μήκος του ορθογωνίου είναι κατά 4cm μεγαλύτερο από το διπλάσιο του πλάτους του και η μία διαγώνιος του ρόμβου είναι ίση με 12cm, να υπολογίσετε:

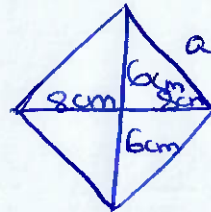
(α) το εμβαδόν του ορθογωνίου και (β) την περίμετρο του ρόμβου.



$$b = x$$

$$\Pi_{\text{ορθ}} = 44 \text{ cm}$$

$$E_{\text{ορθ}} = E_{\text{ρομ}}$$



$$\Pi. \Theta (4\eta)^2 = (κ_1)^2 + (κ_2)^2$$

$$a^2 = 6^2 + 8^2$$

$$a^2 = 36 + 64$$

$$a^2 = 100$$

$$a = \sqrt{100}$$

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$a) \Pi_{\text{ορθ}} = 2a + 2b$$

$$44 = 2(2x + 4) + 2x$$

$$44 = 4x + 8 + 2x$$

$$44 - 8 = 4x + 2x$$

$$\frac{36}{6} = \frac{6x}{6} \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$a = 2 \cdot 6 + 4 = 12 + 4 = 16 \text{ cm}$$

$$b = 6 \text{ cm}$$

$$E_{\text{ορθ}} = a \cdot b$$

$$E_{\text{ορθ}} = 16 \cdot 6$$

$$E_{\text{ορθ}} = 96 \text{ cm}^2$$

$$b) E_{\text{ρομ}} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

$$96 = \frac{6 \cdot \delta_2}{2}$$

$$\frac{96 \cdot 2}{6} = \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = 16 \text{ cm}$$

$$\Pi = 4 \cdot a$$

$$\Pi = 4 \cdot 10$$

$$\Pi = 40 \text{ cm}$$

12. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ΑΒ = 5cm, ΔΒ = 6cm και γωνία Β = 100°. Τα τόξα ΕΟΖ και ΗΟΘ έγιναν με κέντρα Β και Δ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.

$$E_{\text{σκ}} = E_{\text{ρομ}} - 2 E_{\text{κ.τομ.}} = 24 - 2 \cdot \frac{15\eta}{24}$$

$$R = 3 \text{ cm}$$

$$\mu = 100^\circ$$

$$= (24 - \frac{15\eta}{2}) \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{ρομ}} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

$$E_{\text{ρομ}} = \frac{4 \cdot 6}{2}$$

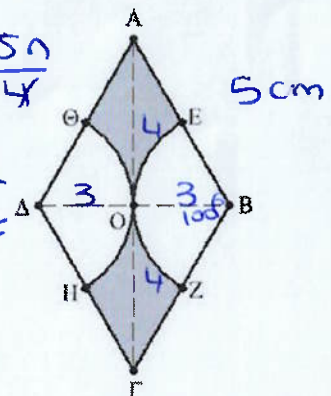
$$E_{\text{ρομ}} = 24 \text{ cm}^2$$

$$E_{\text{κ.τομ.}} = \frac{\Pi \cdot R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\Pi \cdot 3^2 \cdot 100}{360}$$

$$R = 3 \text{ cm}$$

$$\mu = 100^\circ$$

$$= \frac{\Pi \cdot 9 \cdot 100}{360} = \frac{15\eta}{4} \text{ cm}^2$$



$$\Pi. \Theta (4\eta)^2 = (κ_1)^2 + (κ_2)^2$$

$$5^2 = 3^2 + (AO)^2$$

$$25 = 9 + (AO)^2$$

$$25 - 9 = (AO)^2$$

$$(AO)^2 = 16$$

$$(AO) = \sqrt{16}$$

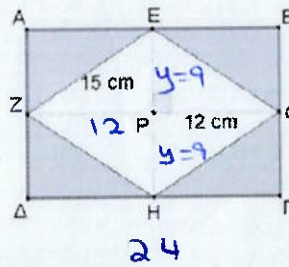
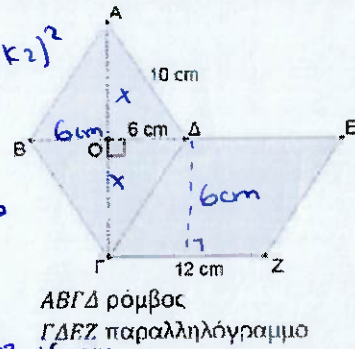
$$13/24$$

$$(AO) = 4 \text{ cm}$$

13. Να βρείτε το εμβαδόν των πιο κάτω σκιασμένων σχημάτων:

(α)

(β)



$$\begin{aligned} \text{Π.Θ } (4n)^2 &= (κ_1)^2 + (κ_2)^2 \\ 15^2 &= 12^2 + y^2 \\ 225 &= 144 + y^2 \\ y^2 &= 225 - 144 \\ y^2 &= 81 \Rightarrow y = \sqrt{81} \Rightarrow y = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ΑΒΓΔ ρόμβος} \\ \text{ΓΔΕΖ παραλληλόγραμμο} \\ \text{ΑΒΓΔ ορθογώνιο} \\ \text{ΕΘΗΖ ρόμβος} \end{aligned}$$

$$Ε_{σκ} = Ε_{ορθ} - Ε_{ορθ}$$

$$Ε_{σκ} = 432 - 216 = 216 \text{ cm}^2$$

$$Ε_{ορθ} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

$$Ε_{ορθ} = 6 \cdot 16$$

$$Ε_{ορθ} = \frac{6 \cdot 16}{2}$$

$$Ε_{ορθ} = 96 \text{ cm}^2$$

$$Ε_{ορθ} = 12 \cdot 6$$

$$Ε_{ορθ} = 96 \text{ cm}^2$$

$$Ε_{ορθ} = a \cdot b$$

$$Ε_{ορθ} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

$$Ε_{ορθ} = 24 \cdot 18$$

$$Ε_{ορθ} = \frac{24 \cdot 18}{2}$$

$$Ε_{ορθ} = 432 \text{ cm}^2$$

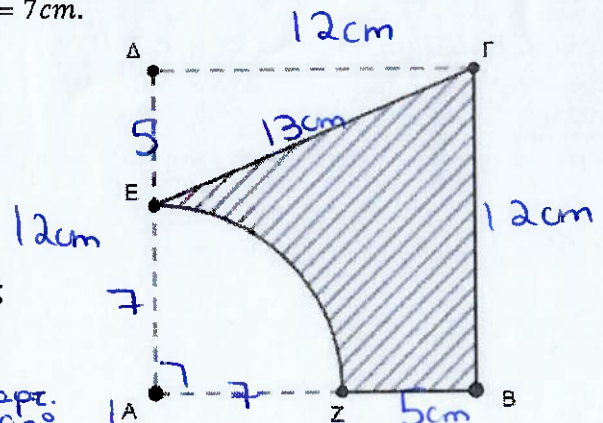
$$Ε_{ορθ} = 216 \text{ cm}^2$$

14. Στο πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 12cm και το ΑΖΕ είναι τεταρτοκύκλιο με κέντρο Α και ακτίνα ΕΑ = 7cm.

Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδό της σκιασμένης περιοχής

(β) την περίμετρο της σκιασμένης περιοχής



$$\text{α) } Ε_{σκ} = Ε_{τετρ} - Ε_{τμ} - Ε_{τμ}$$

$$Ε_{τετρ} = a^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2$$

$$Ε_{τμ} = \frac{b \cdot u}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$Ε_{τμ} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \cdot 7^2}{4} = \frac{49\pi}{4}$$

$$Ε_{σκ} = 144 - 30 - \frac{49\pi}{4}$$

$$= (114 - \frac{49\pi}{4}) \text{ cm}^2$$

β)

$$\begin{aligned} \text{Π.Θ: } (4n)^2 &= (κ_1)^2 + (κ_2)^2 \\ (ΕΓ)^2 &= 5^2 + 12^2 \\ (ΕΓ)^2 &= 25 + 144 \\ (ΕΓ)^2 &= 169 \Rightarrow (ΕΓ) = \sqrt{169} = 13 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{Π}_{σκ} = 13 + 12 + 5 + \widehat{ΕΖ} = (30 + \frac{7\pi}{2}) \text{ cm}$$

$$\widehat{ΕΖ} = \frac{2\pi R \cdot \mu}{360} = \frac{2\pi \cdot 7 \cdot 90}{360} = \frac{7\pi}{2}$$

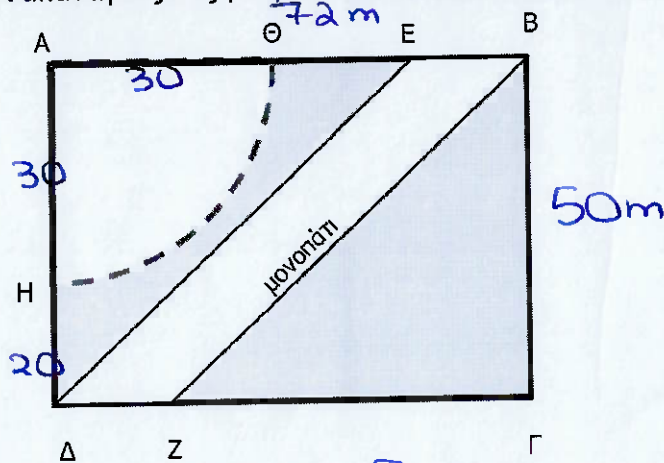
15. Ένα πάρκο σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (ΑΒΓΔ) με διαστάσεις ΑΒ=72m και ΒΓ=50m, διασχίζεται από ένα μονοπάτι σε σχήμα παραλληλογράμμου (ΕΒΖΔ). Στο άκρο Α του πάρκου, θα τοποθετηθεί ένας προβολέας ο οποίος θα φωτίζει κυκλικό τομέα ακτίνας 30m.

Αν ξέρουμε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΕΒΖΔ είναι το ένα τέταρτο του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε:

(α) το μήκος του τόξου ΗΘ που θα σχηματίζει το φως του προβολέα.

(β) το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας του σχήματος.

Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του



$$E_{\text{EBZD}} = \frac{1}{4} E_{\text{ABCD}}$$

$$E_{\text{ABCD}} = a \cdot b = 72 \cdot 50 = 3600 \text{ m}^2$$

$$E_{\text{EBZD}} = \frac{1}{4} \cdot 3600 = 900 \text{ m}^2$$

$$\text{α) } \chi_{\text{HΘ}} = \frac{2\pi R \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 30 \cdot 90}{360} = 15\pi \text{ m}$$

$$\text{β) } E_{\text{σκ}} = E_{\text{ABCD}} - E_{\text{EBZD}} - E_{\text{κ.τομ.}}_{R=30^\circ}$$

$$= 3600 - 900 - 225\pi = (2700 - 225\pi) \text{ m}^2$$

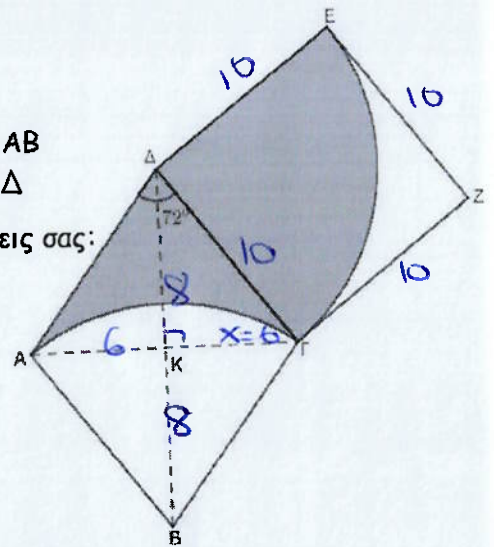
$$E_{\text{κ.τομ.}}_{R=30^\circ} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot 30^2 \cdot 90}{360} = \frac{900\pi}{4} = 225\pi \text{ m}^2$$

16. Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

- $AB\Gamma\Delta$ ρόμβος με κέντρο το σημείο K ,
διαγώνιο $B\Delta$ ίση με $16m$ και γωνία $A\Delta\Gamma$ ίση με 72°
- $\Gamma\Delta E Z$ τετράγωνο με περίμετρο $40m$
- $AB\Gamma$ κυκλικός τομέας με κέντρο το σημείο B και ακτίνα AB
- $E\Delta\Gamma$ τεταρτοκύκλιο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα $\Gamma\Delta$

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- (α) Τις γωνίες $AB\Gamma$, $\Gamma K\Delta$ και $A\Delta B$.
 (β) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔK , $A\Gamma$ και AB .
 (γ) Το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.
 (Η απάντηση να δοθεί συνάρτηση του π).



(δ) Την περίμετρο της σκιασμένης περιοχής. (Η απάντηση να δοθεί συνάρτηση του π).

$$\text{Πτερ} = 40m$$

$$\text{Πτερ} = 4a$$

$$\frac{40}{4} = \frac{4 \cdot a}{4}$$

$$\boxed{a = 10m}$$

α) $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 72^\circ$ (απέναντι γωνίες ρόμβου ίσες)

$\hat{\Gamma}\hat{K}\hat{\Delta} = 90^\circ$ (οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα)

$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{B} = \frac{72}{2} = 36^\circ$ (οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομεί τη γωνία του)

β) $\Delta K = 8m$ (οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται)

π.θ $(\eta)^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2$

$$10^2 = 8^2 + x^2$$

$$100 = 64 + x^2$$

$$x^2 = 100 - 64$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36}$$

$$\boxed{x = 6m}$$

$$E_{\rho\sigma\gamma} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$$

$$E_{\rho\sigma\gamma} = \frac{12 \cdot 6}{2}$$

$$E_{\rho\sigma\gamma} = 36m^2$$

$$E_{\kappa\iota\sigma\gamma} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu}{360}$$

$$R = 10$$

$$\mu = 72$$

$$= \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 72}{360}$$

$$= \frac{\pi \cdot 100 \cdot 72}{360} = 20\pi m^2$$

$$E_{\kappa\iota\sigma\gamma} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu}{360}$$

$$\mu = 90^\circ$$

$$R = 10$$

$$= \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90}{360}$$

$$= \frac{\pi \cdot 100 \cdot 90}{360} = 25\pi m^2$$

$A\Gamma = 12m$ (οι διαγώνιοι διχοτομούνται)

δ) $E_{\sigma\kappa} = E_{\rho\sigma\gamma} - E_{\kappa\iota\sigma\gamma} + E_{\kappa\iota\sigma\gamma} = 36 - \frac{20\pi}{1} - 25\pi = (6 - 45\pi)m^2$

17. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $A\Gamma = 32\text{ cm}$, $BH = \Delta Z = 8\text{ cm}$ και γωνία $\Delta\hat{\Gamma}B = 30^\circ$.

Το $E\Theta\Delta$ είναι ημικύκλιο, το ΓZH είναι κυκλικός τομέας με κέντρο Γ και ακτίνα ΓH και το $\Delta E\Lambda$ είναι τεταρτοκύκλιο με κέντρο Δ και ακτίνα $\Lambda\Delta$.

Αν η περίμετρος του ρόμβου είναι $\Pi = 80\text{ cm}$,

α) Να δείξετε ότι:

i. $A\Delta = 20\text{ cm}$

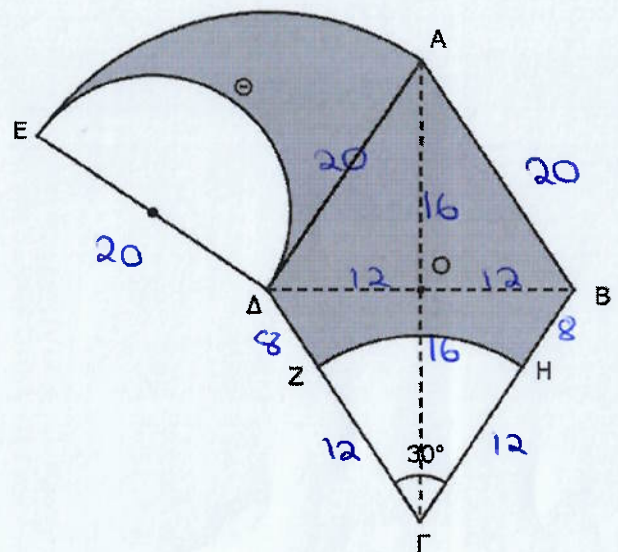
και

ii. $B\Delta = 24\text{ cm}$.

β) Να βρείτε:

i. το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας και

ii. την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.



(Οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν και συναρτήσει του π).

α) i) $\Pi_{\text{ρομ}} = 4a$

$$\frac{80}{4} = \frac{4a}{4} \Rightarrow a = 20\text{ cm}$$

$$\Rightarrow A\Delta = 20\text{ cm}$$

ii) $\Pi_{\text{Θ}} (4n)^2 = (κ_1)^2 + (κ_2)^2$

$$20^2 = 16^2 + (BO)^2$$

$$400 = 256 + (BO)^2$$

$$(BO)^2 = 400 - 256$$

$$(BO)^2 = 144$$

$$(BO) = \sqrt{144}$$

$$BO = 12\text{ cm}$$

$B\Delta = 24\text{ cm}$ (οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούνται.)

β) i) $E_{\text{ομ}} = E_{\text{ρομ}} - E_{\text{κ.τομ}} + E_{\text{τεταρτ}} - E_{\text{ημικ}} = 384 - 12\pi + 100\pi - 50\pi = (384 + 38\pi)\text{ cm}^2$

$$E_{\text{ρομ}} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \frac{32 \cdot 24}{2} = 384\text{ cm}^2$$

$$E_{\text{τεταρτ}} = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi \cdot 20^2}{4} = \frac{100\pi}{1} = 100\pi\text{ cm}^2$$

$$E_{\text{κ.τομ}} = \frac{\pi R^2 \cdot \kappa}{360} = \frac{\pi \cdot 12^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi \cdot 144 \cdot 30}{360} = 12\pi\text{ cm}^2$$

$$E_{\text{ημικ}} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = \frac{100\pi}{2} = 50\pi\text{ cm}^2$$

β ii) $\Pi_{\text{ομ}} = \gamma_{\widehat{ZH}} + 8 + 20 + \gamma_{\widehat{AE}} + \gamma_{\widehat{E\Theta\Delta}} + 8$

$$\gamma_{\widehat{ZH}} = \frac{2\pi R \cdot \kappa}{360} = \frac{2\pi \cdot 12 \cdot 30}{360} = 2\pi\text{ cm}$$

$$\gamma_{\widehat{AE}} = \frac{2\pi R \cdot \kappa}{360} = \frac{2\pi \cdot 20 \cdot 90}{360} = 10\pi\text{ cm}$$

$$\gamma_{\widehat{E\Theta\Delta}} = \frac{2\pi R \cdot \kappa}{360} = \frac{2\pi \cdot 10 \cdot 180}{360} = 10\pi\text{ cm}$$

$$\Pi_{\text{σκ}} = 2\pi + 8 + 20 + 10\pi + 10\pi + 8 = (36 + 22\pi)\text{ cm}$$

Ενότητα 4: Εξισώσεις - Ανισώσεις α' Βαθμού

1. Να γράψετε δίπλα από κάθε σχέση ανάλογα τη λέξη «ορθό» ή «λάθος».

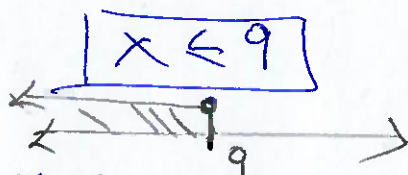
α) Αν $x > 4$ τότε $\frac{x}{-3} > \frac{4}{-3}$	Λάθος
β) Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - 7 > \beta - 7$	Ορθό
γ) Αν $\alpha > 5$ τότε $-\alpha < -5$	Ορθό
δ) Αν $\alpha \leq \beta$ τότε $-\alpha \leq -\beta$	Λάθος

2. Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τη λύση γραφικά πάνω στην ευθεία των ρητών αριθμών.

α) $5x - 6 \leq 3x + 12$

$$5x - 3x \leq 12 + 6$$

$$\frac{2x}{2} \leq \frac{18}{2}$$



Ε.Κ.Π.=6

γ) $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} \leq 3x - 14$

$$3(5x-7) - 2(2x+7) \leq 6(3x-14)$$

$$15x - 21 - 4x - 14 \leq 18x - 84$$

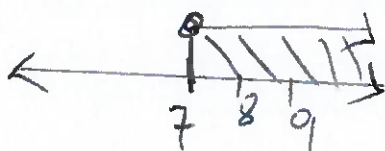
$$15x - 4x - 18x \leq -84 + 21 + 14$$

$$-7x \leq -49$$

αρνητικός
συντελεστής
(αυξάνει
ή φέρει)

$$\frac{-7x}{-7} \geq \frac{-49}{-7}$$

$$x \geq 7$$

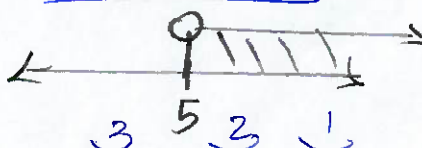


β) $7x - 3(2x - 5) > 20$

$$7x - 6x + 15 > 20$$

$$7x - 6x > 20 - 15$$

$$x > 5$$



δ) $\frac{3(2x-1)}{2} - \frac{2(3-2x)}{3} < \frac{3-4x}{6}$

Ε.Κ.Π.=6

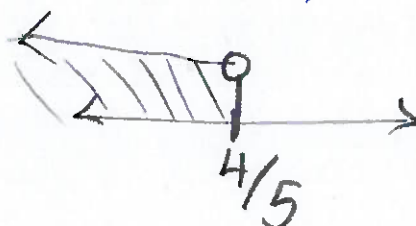
$$9(2x-1) - 4(3-2x) < 3-4x$$

$$18x - 9 - 12 + 8x < 3 - 4x$$

$$18x + 8x + 4x < 3 + 9 + 12$$

$$30x < 24$$

$$x < \frac{24}{30}$$



3. Δίνεται η ανίσωση $5x - 6(x + 5) \leq 2(x + 5) - (4 - x)$.

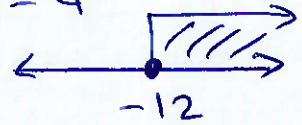
α) Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε γραφικά τη λύση της στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

$$\Leftrightarrow 5x - 6x - 30 \leq 2x + 10 - 4 + x$$

$$\Leftrightarrow 5x - 6x - 2x - x \leq +30 + 10 - 4$$

$$\Leftrightarrow -3x \leq 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} \geq \frac{36}{-3} \Leftrightarrow \boxed{x \geq -12}$$



β) Να γράψετε τις τρεις μικρότερες ακέραιες λύσεις της ανίσωσης.

$-12, -11, -10$

4. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Ανίσωση	Γραφική αναπαράσταση	Διάστημα
$-2 \leq x < 0$		$x \in [-2, 0)$
$-1 \leq x \leq 5$		$x \in [-1, 5]$
$x > 3$		$x \in (3, +\infty)$
$x \leq 1$		$x \in (-\infty, 1]$

5. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων.

α) $3(x+2) > x+12$ και $2(x-5) < 2-(5-x)$

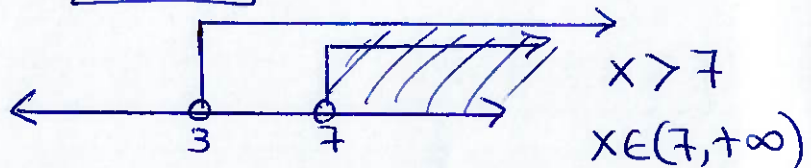
$$\Leftrightarrow 3x+6 > x+12 \quad \Leftrightarrow 2x-10 < 2-5+x$$

$$\Leftrightarrow 3x-x > 12-6 \quad \Leftrightarrow 2x-x < 2-5+10$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} > \frac{6}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x < 7}$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$



β) $4(x+4)+x+1 > 2(4x-5)$ και $6(11-x) \leq 4(x-2)-3(x+1)$

$$\Leftrightarrow 4x+16+x+1 > 8x-10$$

$$66-6x \leq 4x-8-3x-3$$

$$\Leftrightarrow 4x-8x+x > -16-1-10$$

$$\Leftrightarrow -3x > -27$$

$$\Leftrightarrow -7x \leq -77$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} < \frac{-27}{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7x}{-7} \geq \frac{-77}{-7}$$

$$\Leftrightarrow x < 9$$

$x \notin \mathbb{R}$

$$x \geq 11$$

δεν συνάπτονται

γ) $\frac{4(x-5)}{5} - \frac{1}{1} < \frac{7x}{10} - \frac{18}{5}$

και

$$\frac{10}{2} \cdot \frac{x+3}{2} - \frac{27}{5} > \frac{3x-1}{20} - \frac{x}{5}$$

$$\Leftrightarrow 8(x-5)-10 < 7x-36$$

$$10(x+3)-108 > 3x-1-4x$$

$$\Leftrightarrow 8x-40-10 < 7x-36$$

$$\Leftrightarrow 10x+30-108 > 3x-1-4x$$

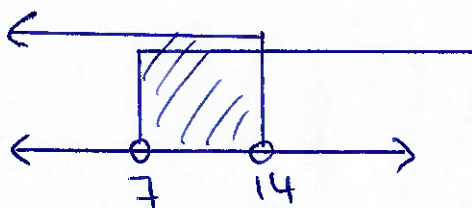
$$\Leftrightarrow 8x-7x < +40+10-36$$

$$\Leftrightarrow 10x-3x+4x > -30+108-1$$

$$\Leftrightarrow x < 14$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x}{11} > \frac{77}{11}$$

$$\Leftrightarrow x > 7$$



$$7 < x < 14$$

$$x \in (7, 14)$$

13. Η εταιρεία πετρελαιοειδών «Πετρόικα» προτείνει στους νέους πελάτες της τα εξής πακέτα για το πετρέλαιο θέρμανσης:

A Πακέτο : κόστος μεταφοράς 80 € και χρέωση 0,58 € ανά λίτρο

B Πακέτο : χρέωση 0,60 € ανά λίτρο χωρίς κόστος μεταφοράς

Από πόσα λίτρα και πάνω συμφέρει η επιλογή του A πακέτου; *άρα είναι πιο φτηνό το A*

λίτρα = x

A = 58x + 8000

B = 60x

$58x + 8000 < 60x$

$58x - 60x < -8000$

$\frac{-2x}{-2} > \frac{-8000}{-2} \Rightarrow x > 400$

τουλάχιστον 401 λίτρα

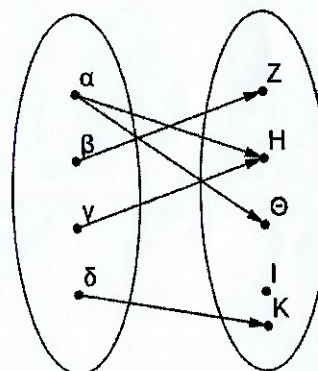
Ενότητα 5: Συναρτήσεις

1. Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται συνάρτηση σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις.

α) $A = \{(3,2), (0,2), (5,7), (-1,-3)\}$

Το γράφημα ορίζει συνάρτηση γιατί κάθε x αντιστοιχεί σε ένα μόνο y.

β)



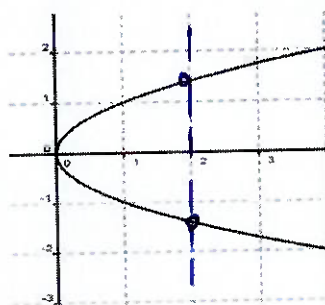
Το βεληρίδες διαγράμμα δεν ορίζει συνάρτηση γιατί x=a αντιστοιχεί σε δύο y.

γ)

X	2	1	-3	4	0
Ψ	4	4	4	4	4

Ο πίνακας τιμών ορίζει συνάρτηση, γιατί κάθε x αντιστοιχεί σε ένα μόνο y.

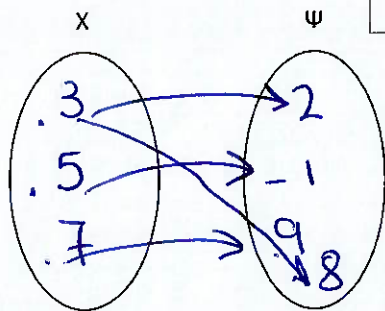
δ)



Η γραφική παράσταση δεν ορίζει συνάρτηση γιατί το x=2 αντιστοιχεί σε 2 y.

2. α) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο βελοειδές διάγραμμα της αντιστοιχίας που παρουσιάζεται στον πίνακα:

Χ	3	5	7	3
Ψ	2	-1	9	8

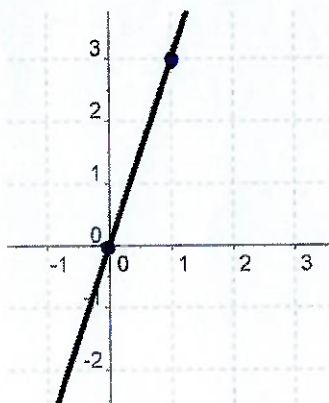


β) Να εξετάσετε κατά πόσο το πιο πάνω βελοειδές διάγραμμα ορίζει συνάρτηση.

Το βελοειδές διάγραμμα δεν ορίζει συνάρτηση γιατί το $x=3$ αντιστοιχεί σε 2 ψ .

3. Να βρείτε τους τύπους των ευθειών στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:

α)



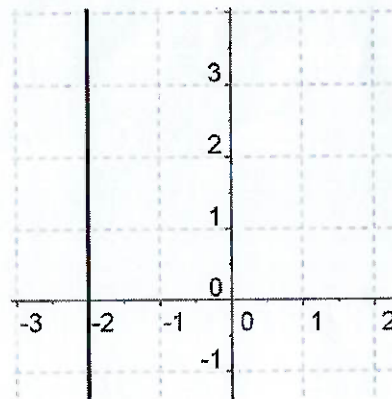
$$(0,0) \Rightarrow \psi = ax$$

$$\begin{matrix} x & \psi \\ (1,3) \end{matrix} \Rightarrow 3 = a \cdot 1$$

$$\Rightarrow \boxed{3 = a}$$

$$\boxed{\psi = 3x}$$

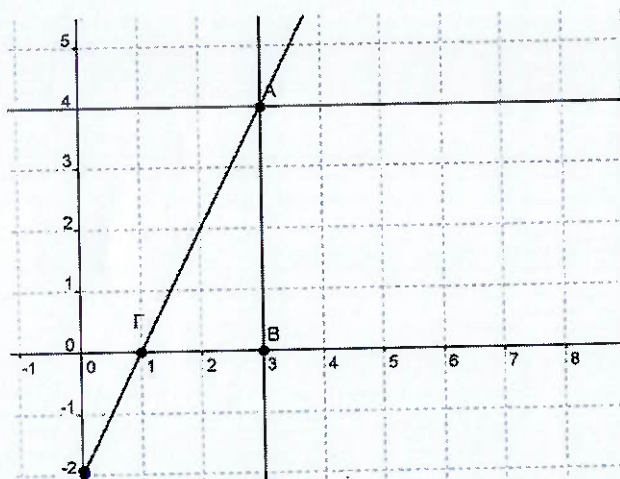
β)



ειδική περίπτωση
μορφής $x = k$

$$\boxed{x = -2}$$

4. α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.
 β) Στη συνέχεια να βρείτε τους τύπους των ευθειών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ.
 γ) Ακολουθώντας να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



α) $A(3, 4)$, $B(3, 0)$, $\Gamma(1, 0)$

β) $AB: x = 3$

$B\Gamma: \psi = 0$

$A\Gamma: \lambda = \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$ ή $\lambda = \frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 4}{1 - 3} = \frac{-4}{-2} = 2$

$\psi = ax + b \Rightarrow \psi = 2x + b$
 $\lambda = a = 2$
 $(0, -2) = (0, b) \Rightarrow b = -2$

$A\Gamma: \boxed{\psi = 2x - 2}$

δ) $E_{\text{Τριγ}} = \frac{b \cdot \psi}{2} = \frac{(B\Gamma) \cdot (AB)}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ τ.μ.}$

5. Να βρείτε την κλίση των πιο κάτω ευθειών:

α) $\psi = 3x - 6$

$\lambda = 3$

β) $\psi = 4 - x$

$\lambda = -1$

γ) $\psi = -2$

$\lambda = 0$

δ) $x = 4$

$\lambda = \text{δεν ορίζεται}$

ε) $3\psi = 9 - 6x$

$\lambda = -2$

↓

Αύω ως προς ψ

$\frac{3\psi}{3} = \frac{9 - 6x}{3} \Rightarrow \psi = 3 - 2x$

6. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας με κλίση $\lambda = -2$ και περνά από το σημείο

$(-2, 1)$. $\psi = ax + b$

$\boxed{\psi = -2x - 3}$

$\lambda = -2 = a \Rightarrow \psi = -2x + b$

$(-2, 1) \Rightarrow 1 = -2(-2) + b \Rightarrow 1 = 4 + b \Rightarrow b = -3$

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(0, 5)$ και $B(-2, 9)$.

$(0, 5) = (0, b) \Rightarrow b = 5$

$\psi = ax + b \Rightarrow \psi = ax + 5$

$(-2, 9) \Rightarrow 9 = a \cdot (-2) + 5$

$-2a + 5 = 9$

$-2a = 9 - 5$

$\frac{-2a}{-2} = \frac{4}{-2}$

$a = -2$

$\boxed{\psi = -2x + 5}$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $(0, 0)$ και $(2, 10)$.

$(0, 0) \Rightarrow \psi = ax$

$(2, 10) \Rightarrow \frac{10}{2} = \frac{a \cdot 2}{2} \Rightarrow \boxed{a = 5} \quad \boxed{\psi = 5x}$

7. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(-1, 3)$ και έχει την

ίδια κλίση με την ευθεία $2x - \psi = 5$.

$\Rightarrow 2x - 5 = \psi \Rightarrow \psi = 2x - 5$

$\lambda = 2 = a \quad \psi = ax + b \Rightarrow \psi = 2x + b$

$(-1, 3) \Rightarrow 3 = 2 \cdot (-1) + b \Rightarrow 3 + 2 = b \Rightarrow b = 5$

$\lambda = 2$

8. Η τηλεφωνική εταιρεία η PRIMENET χρεώνει με πάγιο 500 σεντ το μήνα και

$\boxed{\psi = 2x + 5}$

10 σεντ το κάθε λεπτό τηλεφωνικής κλήσης.

α) Να βρείτε το συνολικό κόστος ψ που χρεώνει η εταιρεία ως

συνάρτηση των λεπτών x τηλεφωνικής κλήσης στη μορφή $\psi = ax + b$.

β) Αν κάποιος χρεώθηκε 13 € το περασμένο μήνα πόσα λεπτά μίλησε στο

τηλέφωνο συνολικά.

$x = \text{αριθμός λεπτών}$

α) $\psi = 10 \cdot x + 500$

10 σεντ
το λεπτό
για x λεπτά

β) $\psi = €13 = 1300 \text{ σεντ}$

$10x + 500 = 1300$

$\Rightarrow 10x = 1300 - 500$

$\Rightarrow \frac{10x}{10} = \frac{800}{10} \Rightarrow \boxed{x = 80 \text{ λεπτά}}$

9. Δίνεται η ευθεία (ϵ_1): $4x - 2y = 8$. Να βρείτε:

(α) το σημείο τομής της ευθείας (ϵ_1)
με τον άξονα $x'x \Rightarrow y = 0$

$$4x - 2 \cdot 0 = 8$$

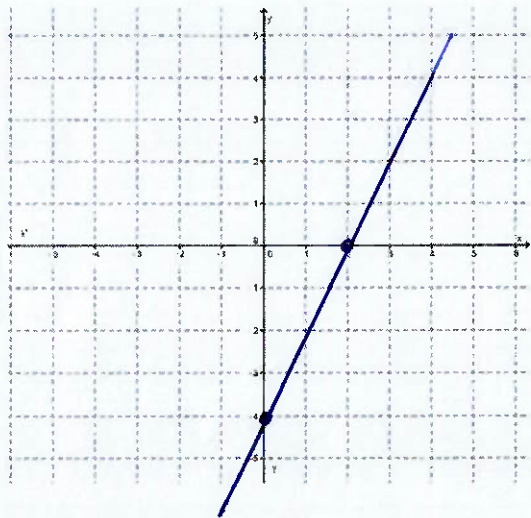
$$\Rightarrow 4x - 0 = 8$$

$$\Rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{8}{4} \Rightarrow x = 2 \quad \boxed{(2, 0)}$$

(β) το σημείο τομής της ευθείας (ϵ_1)
με τον άξονα $y'y \Rightarrow x = 0$

$$4 \cdot 0 - 2y = 8$$

$$\Rightarrow \frac{-2y}{-2} = \frac{8}{-2} \Rightarrow y = -4 \quad \boxed{(0, -4)}$$



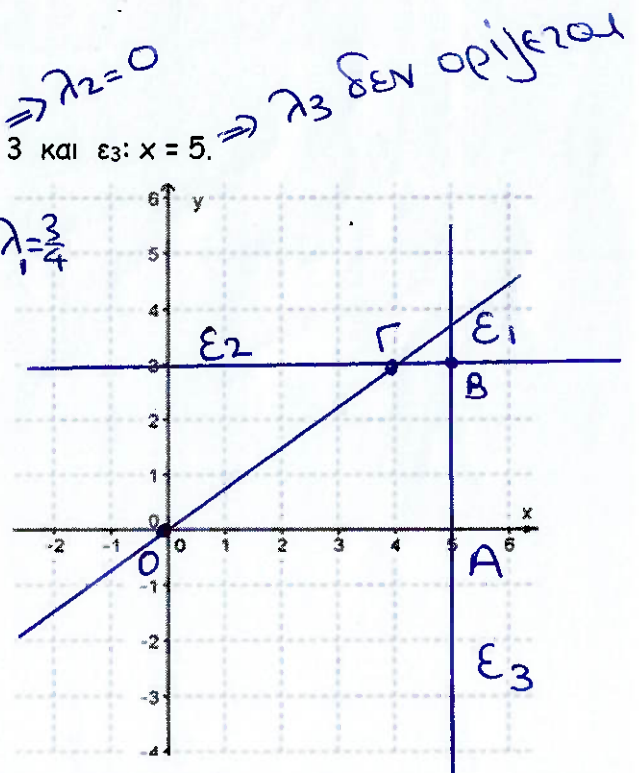
(γ) να παραστήσετε γραφικά την ευθεία (ϵ_1).

10. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: 4y - 3x = 0$, $\epsilon_2: y = 3$ και $\epsilon_3: x = 5$.

(α) Να βρείτε την κλίση τους.

$$4y - 3x = 0 \Rightarrow \frac{4y}{4} = \frac{3x}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \quad \lambda_1 = \frac{3}{4}$$

(β) Να παραστήσετε γραφικά τις ευθείες στο ίδιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων.



$\epsilon_1: y = \frac{3}{4}x \Rightarrow (0, 0)$

$x = 4 \Rightarrow y = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} \Rightarrow y = 3$
 $(4, 3)$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & -4 & 0 & 4 \\ \hline y & -3 & 0 & 3 \end{array}$$

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τετραπλεύρου που σχηματίζεται από τις ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 και τον άξονα των x .

$O(0,0)$, $A(5,0)$, $B(5,3)$, $\Gamma(4,3)$

(δ) Να βρείτε το εμβαδό και την περίμετρο του τετραπλεύρου αυτού.

ΟΑΒΓ ορθογώνιο τραπέζιο

$$E = \frac{(b_1 + b_2) \cdot u}{2} = \frac{(1 + 5) \cdot 3}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9 \text{ τ.μ.}$$

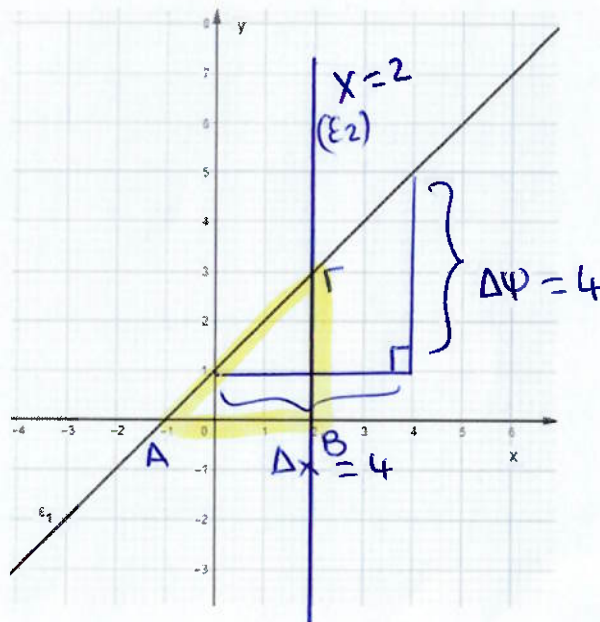
$b_1 = B\Gamma = 1 \mu.$ $u = AB = 3 \mu.$

$b_2 = OA = 5 \mu.$

11. α) Να βρείτε την κλίση και την εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) στο πιο κάτω διάγραμμα.

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της ευθείας (ϵ_2): $x = 2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από τις ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) και τον άξονα των x .

γ) Για ποια τιμή του μ το σημείο $\left(\frac{2\mu+1}{3}, \mu-1\right)$ ανήκει στην ευθεία (ϵ_1).



$$A(-1, 0), \Gamma(2, 3)$$

$$\text{ή } \lambda_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\alpha) \rightarrow \lambda_1 = \frac{3 - 0}{2 - (-1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\lambda_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{4} = 1$$

$$(0, 1) = (0, b)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$y = ax + b$$

$$\lambda = a = 1$$

$$y = 1x + 1$$

$$\epsilon_1: \boxed{y = x + 1}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad E_{AB\Gamma} &= \frac{b \cdot w}{2} \\ &= \frac{(AB) \cdot (BG)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} \text{ τ. μ.} \end{aligned}$$

$$\gamma) \quad \left(\frac{2\mu+1}{3}, \mu-1 \right)$$

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ \frac{\mu-1}{1} &= \frac{2\mu+1}{3} + \frac{1}{1} \Rightarrow 3(\mu-1) = 2\mu+1+1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3\mu - 3 = 2\mu + 1 + 1$$

$$\Rightarrow 3\mu - 2\mu = 2 + 3 \Rightarrow \boxed{\mu = 5}$$

Ενότητα 8: Στατιστική - Πιθανότητες

1. Η βαθμολογία στα 5 μαθήματα ενός μαθητή Γ' Γυμνασίου είναι:
5, 14, 13, 14, και 19.

Να υπολογίσετε: (α) τη μέση τιμή

$$\bar{x} = \frac{5+14+13+14+19}{5} \Rightarrow x = \frac{65}{5} \Rightarrow \boxed{x=13}$$

(β) τη διάμεσο και

Αύξουσα σειρά: ~~5~~, ~~13~~, 14, ~~14~~, ~~19~~

$$\downarrow$$

$$\boxed{x_8 = 14}$$

(γ) την επικρατούσα τιμή.

$x_e = 14$ ($f_i = 2$ παρουσιάζεται 2 φορές)

2. Πιο κάτω δίνονται οι θερμοκρασίες για 10 μέρες τον Ιανουάριο
18, 19, 16, 13, 15, 18, 23, 17, 18, 20

Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή των θερμοκρασιών.

Αύξουσα σειρά: ~~13~~, ~~15~~, ~~16~~, ~~17~~, 18, 18, ~~18~~, ~~19~~, ~~20~~, ~~23~~

$$\bar{x} = \frac{13+15+16+17+3 \cdot 18+19+20+23}{10}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{177}{10} = 17,7$$

$$\text{Επικρατούσα τιμή} = x_e = 18 \quad (f_i = 3) \quad \text{Διάμεσο} = x_8 = \frac{18+18}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

3. Ένας μαθητής έχει μέσο όρο βαθμολογίας σε έξι διαγωνίσματα 15. Στα δύο διαγωνίσματα πήρε τον ίδιο βαθμό και στα άλλα πήρε 19, 18, 11 και 16. Να βρείτε το βαθμό του στα δύο διαγωνίσματα.

$$\bar{x} = 15$$

$$\bar{x} = \frac{19+18+11+16+x+x}{6} \Leftrightarrow \frac{15}{1} \cdot \frac{64+2x}{6}$$

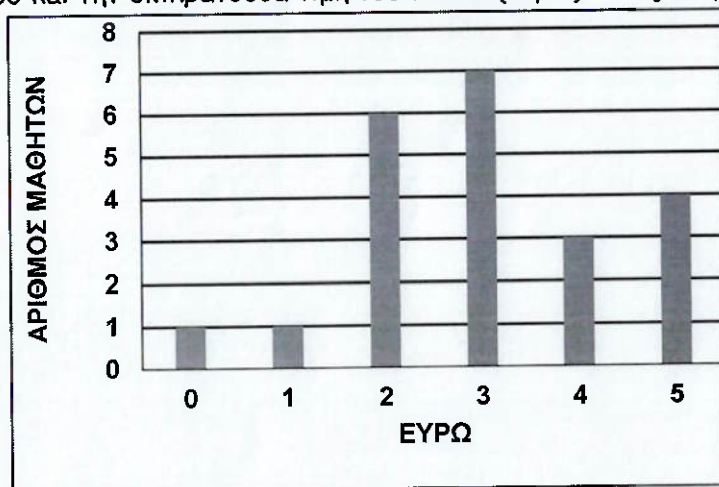
$$\Leftrightarrow 15 \cdot 6 = 64 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 90 = 64 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 90 - 64 = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{26}{2} = \frac{2x}{2} \Rightarrow \boxed{x=13}$$

4. Το πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζει πόσα ευρώ ξόδεψαν οι μαθητές μιας τάξης στην τελευταία εκδρομή τους που έγινε τον Μάιο. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή του ποσού (ευρώ) που ξόδεψαν οι μαθητές.



(6) ένε παράδειγμα
σελ. 130
Β' τευχος)

~~0, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5~~

$$\bar{X} = \frac{0+1+6 \cdot 2+7 \cdot 3+3 \cdot 4+4 \cdot 5}{22} \Rightarrow \bar{X} = \frac{1+12+21+12+20}{22}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{66}{22} \Rightarrow \bar{X} = 3$$

$$\text{Διάμεσο} = X_8 = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow X_8 = 3$$

$$\text{Επικρατούσα} = X_E = 3 \quad (f_1 = 7)$$

5. Η μέση τιμή των βαθμών 11 μαθητών σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά είναι 15. Οι βαθμοί είναι οι:

12, 20, @, 15, 14, 19, (β) 12, 17, 16, 13.

- α) Να υπολογίσετε τα α και β αν το α είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το β. $a = b + 3$

- β) Να βρείτε: την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο.

α) $\bar{X} = 15$

$$\bar{X} = \frac{12+20+(b+3)+15+14+19+b+12+17+16+13}{11}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{1} = \frac{141+2b}{11}$$

$$\Rightarrow 15 \cdot 11 = 141 + 2b$$

$$\Rightarrow 165 - 141 = 2b$$

$$\Rightarrow \frac{24}{2} = \frac{2b}{2} \Rightarrow b = 12$$

$$a = b + 3 = 12 + 3 \Rightarrow a = 15$$

β) ~~12, 12, 12, 13, 14, 15, 15, 16, 17, 19, 20~~ $\text{Διάμεσο} = X_8 = 15 \quad (f_1 = 3)$

6. Η μέση τιμή έξι αριθμών είναι 10. Οι τρεις από τους αριθμούς αυτούς είναι το 1, το 3 και το 6. Από τους υπόλοιπους τρεις, ο δεύτερος είναι τριπλάσιος από τον πρώτο και τρίτος διπλάσιος από το δεύτερο.

α) Να βρεθούν όλοι οι αριθμοί.

β) Να βρεθεί η διάμεσος των αριθμών αυτών.

$$a = x = 5$$

$$b = 3x = 15$$

$$c = 2 \cdot (3x) = 6x = 6 \cdot 5 = 30$$

α) $1, 3, 6, x, 3x, 6x$

$$\bar{x} = 10 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1+3+6+x+3x+6x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{1} \cdot \frac{10+10x}{6} \Rightarrow 6 \cdot 10 = 10 + 10x$$

$$\Rightarrow 60 - 10 = 10x$$

$$\Rightarrow \frac{50}{10} = \frac{10x}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 5}$$

7. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Αφού καταγραφεί ο δειγματικός χώρος, να υπολογίσετε την πιθανότητα:

$$\Omega = \{ (1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), \dots, (2,6) \\ (3,1), (3,2), \dots, (3,6) \\ (4,1), (4,2), \dots, (4,6) \\ (5,1), (5,2), \dots, (5,6) \\ (6,1), (6,2), \dots, (6,6) \}$$

α) A: το άθροισμα των δύο ενδείξεων να είναι μεγαλύτερο του 9.

$$A = \{ (4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6) \}$$

$$v(A) = 6 \quad P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

β) B: η ένδειξη και στα δύο ζάρια να είναι 7.

$$B = \emptyset \text{ ή } \{ \}$$

$$v(B) = 0$$

$$P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{0}{36} = 0$$

γ) Γ: το γινόμενο των δύο ενδείξεων να είναι περιττός αριθμός.

$$\Gamma = \{ (1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5) \}$$

$$v(\Gamma) = 9 \quad P(\Gamma) = \frac{v(\Gamma)}{v(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

δ) Δ: η μια τουλάχιστον ένδειξη να είναι 2.

$$\Delta = \{ (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ (3,2), (4,2), (5,2), (6,2) \} \quad v(\Delta) = 11$$

$$P(\Delta) = \frac{v(\Delta)}{v(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

ε) E: τα ζάρια να μην έχουν ίδιες ενδείξεις.

$$v(E) = 36 - 6 = 30$$

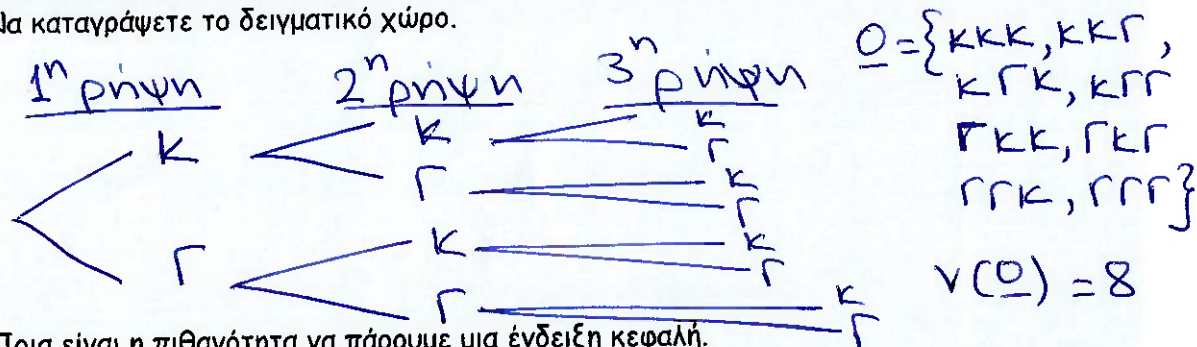
38 / 40

$$E = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) \}$$

$$P(E) = \frac{v(E)}{v(\Omega)} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

8. Ρίχνω τρία νομίσματα στον αέρα.

α) Να καταγράψετε το δειγματικό χώρο.



β) Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε μια ένδειξη κεφαλή.

$$A = \{K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K\} \quad v(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

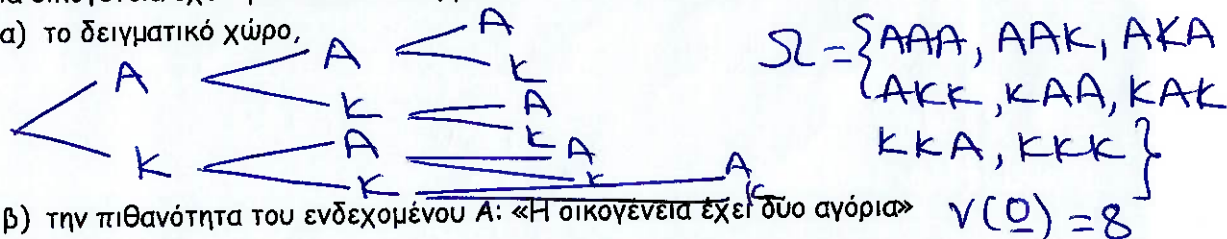
γ) Ποια η πιθανότητα να πάρουμε το πολύ δύο ενδείξεις κεφαλή.

$$B = \{\Gamma\Gamma\Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, K\Gamma\Gamma, K\Gamma K, \Gamma K K\}$$

$$v(B) = 7 \quad P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

9. Μια οικογένεια έχει τρία παιδιά. Να βρείτε:

α) το δειγματικό χώρο,



β) την πιθανότητα του ενδεχομένου A: «Η οικογένεια έχει δύο αγόρια»

$$A = \{AAK, AKA, KAA\}$$

$$v(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

γ) την πιθανότητα του ενδεχομένου B: «Το μεσαίο παιδί είναι κορίτσι»

$$B = \{AKA, KKA, A KK, KKK\}$$

$$v(B) = 4$$

$$P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

10. Το Γυμνάσιο Ακακίου θα εκπροσωπηθεί σε διαγωνισμό Μαθηματικών από ένα αγόρι και ένα κορίτσι. Το αγόρι θα επιλεγεί μεταξύ του Μιχάλη, του Λεωνίδα και του Ευγένιου. Το κορίτσι θα επιλεγεί μεταξύ της Ευτυχίας, της Ελένης, της Κυριακής και της Μαρίας.

- α) Να καταγράψετε το δειγματικό χώρο της σύνθεσης της ομάδας Μαθηματικών.

$$\Omega = \{(\text{Μιχ.}, \text{Ευτυχ.}), (\text{Μιχ.}, \text{Ελένη}), (\text{Μιχ.}, \text{Κυριακή}), (\text{Μιχ.}, \text{Μαρία}), (\text{Λεων.}, \text{Ευτυχ.}), (\text{Λεων.}, \text{Ελένη}), (\text{Λεων.}, \text{Κυριακή}), (\text{Λεων.}, \text{Μαρία}), (\text{Ευγεν.}, \text{Ευ.}), (\text{Ευγ.}, \text{Ελένη}), (\text{Ευγ.}, \text{Κυριακή}), (\text{Ευγ.}, \text{Μαρία})\}$$

- β) Να βρείτε το πλήθος των τρόπων σύνθεσης της ομάδας Μαθηματικών.

$$n(\Omega) = 3 \cdot 4 = 12$$

↓
3 επιλογές στα αγόρια
4 επιλογές στα κορίτσια

- γ) Ποια η πιθανότητα τα δύο παιδιά που θα εκπροσωπήσουν το Γυμνάσιο Ακακίου να έχουν το ίδιο αρχικό γράμμα ονόματος;

$$A = \{(\text{Ευγενιος}, \text{Ευτυχία}), (\text{Ευγένιος}, \text{Ελένη})\}$$

$$n(A) = 2 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- δ) Ποια η πιθανότητα το αρχικό γράμμα του ονόματος, τουλάχιστον ενός από τα δύο παιδιά που θα εκπροσωπήσουν το Γυμνάσιο Ακακίου, να είναι το Ε;

$$B = \{(\text{Μιχ.}, \text{Ευτ.}), (\text{Μιχ.}, \text{Ελένη}), (\text{Λεων.}, \text{Ευτ.}), (\text{Λεων.}, \text{Ελένη}), (\text{Ευγεν.}, \text{Ευαχ.}), (\text{Ευγ.}, \text{Ελένη})\}$$

$$n(B) = 6$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΔΟΘΗΚΑΝ ΣΕ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

A1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(α) \quad \underline{6x + 8y} - \underline{4x - 3y} = 2x + 5y$$

$$(β) \quad (2x^2y) \cdot (3x^3y) = 6x^5y^2$$

A2. Να γράψετε υπό μορφή μιας δύναμης τις πιο κάτω παραστάσεις, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

$$(α) \quad 3^{10} \cdot 3^4 = 3^{14}$$

$$(β) \quad (-7)^5 : (-7)^2 = (-7)^3$$

$$(γ) \quad (5^3)^2 = 5^6$$

A3. Να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών:

$$(α) \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$(β) \quad \sqrt{27} : \sqrt{3} = \sqrt{27 : 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$(γ) \quad \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

A4. Κατασκευαστική εταιρεία ανέλαβε να κτίσει ένα συγκρότημα εξοχικών κατοικιών. Για την υλοποίηση του έργου προσέλαβε 40 υπαλλήλους οι οποίοι θα τέλειωναν το έργο σε 180 εργάσιμες μέρες. Αν η εταιρεία προσλάβανε ακόμη 10 υπαλλήλους, με σκοπό να παραδώσει το έργο νωρίτερα, σε πόσες εργάσιμες μέρες θα τέλειωνε τις εξοχικές κατοικίες;

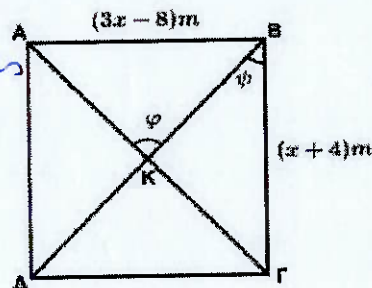
$$ΕΚΤΟΣ \quad ΥΠΗΤ$$

A5. (α) Να γράψετε δυο ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου:

i) οι διαγώνιοι είναι ίσες

ii) οι διαγώνιοι διχοτομούνται

(β) Στο πιο κάτω σχήμα το $ABΓΔ$ είναι τετράγωνο και K είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν $AB = (3x - 8)m$ και $BF = (x + 4)m$, να υπολογίσετε τις τιμές των x , ψ και φ . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$3x - 8 = x + 4 \quad (\text{ότι οι πλευρές είναι ίσες})$$

$$3x - x = 8 + 4$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$$

$$\boxed{x = 6m}$$

$$\hat{\varphi} = 90^\circ \quad (\text{οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα})$$

$$\hat{\psi} = \frac{90}{2} = 45^\circ \quad (\text{οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του})$$

A6. Να λύσετε την πιο κάτω ανίσωση και να παραστήσετε γραφικά τη λύση της στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

$$\frac{x+1}{6} - \frac{3x+2}{3} < \frac{1-x}{2}$$

$$1 \cdot (x+1) - 2(3x+2) < 3(1-x)$$

$$x+1 - 6x - 4 < 3 - 3x$$

$$x - 6x + 3x < 3 - 1 + 4$$

$$-2x < 6$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{6}{-2}$$

$$x > -3$$



B1. Δίνονται τα πολυώνυμα $\varphi(x) = 2x^2 - 5x - 3$ και $\rho(x) = x - 4$. Να υπολογίσετε τα:

(α) $\varphi(-2)$

(β) $\varphi(x) - \rho(x)$

(γ) $\rho(x) \cdot \varphi(x)$

(δ) $\varphi(x) : \rho(x)$

$$\begin{aligned} \alpha) \varphi(-2) &= 2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) - 3 = 2 \cdot (+4) - 5 \cdot (-2) - 3 \\ &= 8 + 10 - 3 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \varphi(x) - \rho(x) &= (2x^2 - 5x - 3) - (x - 4) \\ &= 2x^2 - 5x - 3 - x + 4 = 2x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \rho(x) \cdot \varphi(x) &= (x - 4) \cdot (2x^2 - 5x - 3) \\ &= 2x^3 - 5x^2 - 3x - 8x^2 + 20x + 12 \\ &= 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12 \end{aligned}$$

$$\delta) \varphi(x) : \rho(x) = (2x^2 - 5x - 3) : (x - 4)$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 5x - 3 & x - 4 \\ -2x^2 + 8x & 2x + 3 \\ \hline +8x - 3 & \\ -8x + 12 & \\ \hline +9 & \end{array}$$

- B2. (α) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών και των δυνάμεων, να υπολογίσετε τις παραστάσεις A και B (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).

$$A = \sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8}) - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \sqrt[3]{7^3} =$$

$$B = \frac{5^6 \cdot 5^9 + 2 \cdot (8-3)^{-3}}{5^5 \cdot 25^{-4}} =$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8}) - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} + \sqrt[3]{7^3} \\ &= \sqrt{2 \cdot 50} - \sqrt{2 \cdot 8} - (-3)^2 + 7 = \sqrt{100} - \sqrt{16} - (+9) + 7 = 10 - 4 - 9 + 7 \\ &= +17 - 13 = +4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{5^6 \cdot 5^9 + 2 \cdot (8-3)^{-3}}{5^5 \cdot 25^{-4}} = \frac{5^{-3} + 2 \cdot (5)^{-3}}{5^5 \cdot (5^2)^{-4}} = \frac{(1+2) \cdot 5^{-3}}{5^5 \cdot 5^{-8}} \\ &= \frac{3 \cdot 5^{-3}}{5^{-3}} = 3 \end{aligned}$$

- (β) i) Αν $A = 4$ και $B = 3$, να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:
 $2x + A \geq 0$ και $x - B < 0$

ii) Να παραστήσετε γραφικά την κοινή λύση των πιο πάνω ανισώσεων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

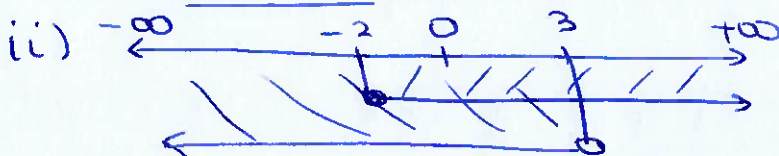
iii) Να γράψετε τη κοινή λύση των πιο πάνω ανισώσεων υπό μορφή διαστήματος.

iv) Να γράψετε την μικρότερη και την μεγαλύτερη κοινή ακέραιά τους λύση.

Μικρότερη κοινή ακέραια λύση:

Μεγαλύτερη κοινή ακέραια λύση:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad 2x + A &\geq 0 & x - B &< 0 \\ 2x + 4 &\geq 0 & x - 3 &< 0 \\ \frac{2x}{2} &\geq \frac{-4}{2} & \boxed{x} &< 3 \\ \boxed{x} &\geq -2 \end{aligned}$$



iii) $x \in [-2, 3)$

iv) Μικρότερη = -2

Μεγαλύτερη = 2

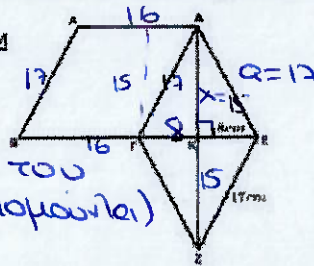
B3. Στο πιο κάτω σχήμα το παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ είναι ισεμβαδικό με το ρόμβο $ΓΔΕΖ$. Το K είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου, $KE = 8cm$ και $EZ = 17cm$. Να υπολογίσετε:

(α) τα μήκη των διαγωνίων του ρόμβου $ΓΕ$ και $ΔΖ$

(β) το εμβαδόν του ρόμβου $ΓΔΕΖ$

(γ) το μήκος του ύψους του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ που αντιστοιχεί στην πλευρά $ΒΓ$

(δ) την περίμετρο του παραλληλογράμμου $ABΓΔ$



α) $ΓΕ = 8 + 8 = 16cm$ (οι διαγωνίοι του ρόμβου διχοτομούνται)
 $\hat{\Delta KE}$ ορθογ. τρίγωνο $\Rightarrow$ ισχύει το Π.Θ
 $(\gamma_1)^2 = (κ_1)^2 + (κ_2)^2$

$$17^2 = 8^2 + x^2$$

$$289 = 64 + x^2$$

$$289 - 64 = x^2$$

$$x^2 = 225$$

$$x = \sqrt{225}$$

$$\boxed{x = 15cm}$$

$ΔΕ = 15 + 15 = 30cm$ (οι διαγωνίοι του ρόμβου διχοτομούνται)

$$β) E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2} = \frac{16 \cdot 30}{2} = 240 cm^2$$

$$γ) υ = x = 15cm$$

$$δ) E_{\text{παραβ.}} = E_{\text{ρόμβου}} \Rightarrow E_{\text{παραβ.}} = 240 cm^2$$

$$E_{\text{παραβ.}} = β \cdot υ$$

$$\frac{240}{15} = \frac{β \cdot 15}{15}$$

$$\boxed{β = 16cm}$$

$$\Pi = 2a + 2β$$

$$\Pi = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 17$$

$$\Pi = 32 + 34$$

$$\boxed{\Pi = 66cm}$$

Δειγματική Ενεία Τελική
Γραπτή Εξέταση 2023-2024

ΜΕΡΟΣ Α:

(A1)

α) $7^4 \cdot 7^2 = 7^6$

β) $11^3 \cdot (-11)^2 = 11^3 \cdot 11^2 = 11^5$

γ) $\frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

δ) $3^{-2} \cdot (9^2)^3 : 27^3 = 3^{-2} \cdot 9^6 : 27^3 = 3^{-2} \cdot (3^2)^6 : (3^3)^3$
 $= 3^{-2} \cdot 3^{12} : 3^9 = 3^{10} : 3^9 = 3^1$

(A2)

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$

β) $\sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{75:3} = \sqrt{25} = 5$

γ) $\sqrt[3]{(-5)^2 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^2 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

δ) $\sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} = \sqrt{14 + \sqrt{1 + 3}} = \sqrt{14 + \sqrt{4}}$
 $= \sqrt{14 + 2} = \sqrt{16} = 4$

(A3)

α) i) $3x^2y + 5yx^2 - 3x^2y = 5yx^2$

ii) $\left(-\frac{2}{3}a^3b^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}b^3\right) = +2a^3b^5$

iii) $(-28x^5y) : (7x^3y^3) = -4x^2y^{-2}$

iv) $7a^2b^3 - (2ab^2) \cdot (3ab) =$
 $= 7a^2b^3 - 6a^2b^3 = 1a^2b^3$

β) $-4x^2y^5$

(A4)

i) Μέση τιμή = 14

$$14 = \frac{18+19+10+8+x+11+18}{7}$$

$$\frac{14}{1} \times \frac{x+84}{7}$$

$$x+84=98$$

$$x=98-84$$

$$\boxed{x=14}$$

$$ii) \quad \cancel{8}, \cancel{10}, \cancel{11}, 14, \cancel{18}, \cancel{18}, \cancel{19}$$

επικρατούσα τιμή = 18

$$iii) \quad \hat{\sigma}^2 = 14$$

$$iv) \quad P(iv) = \frac{0}{7} = 0$$

8) ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ

(A5) α) $2x - 3 < 7$

$$2x < 7 + 3$$

$$\frac{2x}{2} < \frac{10}{2}$$

$$\boxed{x < 5}$$

$$\frac{\frac{2}{x+1}}{6} \leq \frac{\frac{4}{2x-1}}{3} - \frac{\frac{3}{x-5}}{4}$$

$$2(x+1) \leq 4(2x-1) - 3(x-5)$$

$$2x+2 \leq 8x-4-3x+15$$

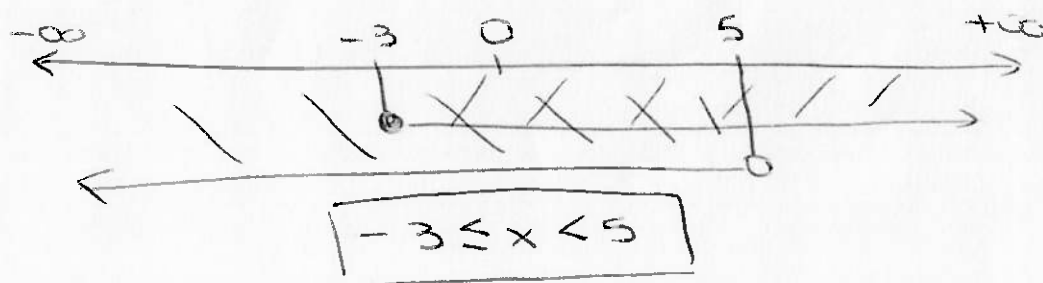
$$2x-8x+3x \leq -2-4+15$$

$$-3x \leq +9$$

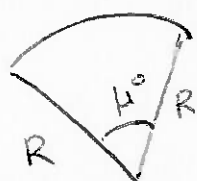
$$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{+9}{-3}$$

$$\boxed{x \geq -3}$$

8)



δ) $R = 4$, $\mu = 30^\circ$



$$\pi = R + R + \underset{R=4}{\gamma}_{\mu=30} = 4 + 4 + \frac{2\pi}{3} = \left(8 + \frac{2\pi}{3}\right) \text{ cm}$$

$$\gamma = \frac{2\pi R \cdot \mu^\circ}{360} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 30}{360} = \frac{2\pi}{3}$$

$$E = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \mu^\circ}{360} = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 30}{360} = \frac{4}{3} \pi \text{ cm}^2$$

A6

α) ΕΚΤΟΣ ΥΠΗΣ

β) ΠΑΘΟΣ

γ) ΠΑΘΟΣ

δ) ΠΑΘΟΣ

ε) ΣΟΣΤΟ

ΜΕΡΟΣ Β:

B1

$$\varphi(x) = 6x^2 - 7x + 2, \quad p(x) = 3x - 2$$

$$\alpha) A = 3 \cdot \varphi(2) = 3 \cdot 12 = \underline{\underline{36}}$$

$$\varphi(2) = 6 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 2 = 6 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 2 = 24 - 14 + 2 = 12$$

$$\begin{aligned} \beta) \varphi(x) - p(x) &= (6x^2 - 7x + 2) - (3x - 2) \\ &= 6x^2 - 7x + 2 - 3x + 2 = 6x^2 - 10x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \varphi(x) \cdot p(x) &= (6x^2 - 7x + 2) \cdot (3x - 2) \\ &= 18x^3 - 12x^2 - 21x^2 + 14x + 6x - 4 \\ &= 18x^3 - 33x^2 + 20x - 4 \end{aligned}$$

$$\delta) \varphi(x) : p(x) = (6x^2 - 7x + 2) : (3x - 2)$$

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 - 7x + 2 & 3x - 2 \\ - 6x^2 + 4x & 2x - 1 \\ \hline -3x + 2 & \\ + 3x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\epsilon) \text{Μήκος} = 2x - 1$$

$$\text{Μήκος} = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

B2 a) i) $\lambda_{E_1} = 0$

ii) $\lambda_{E_2} = 8$ εν οριζοντι

iii) $\lambda_{E_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 4}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$

$\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ (1, 4) \end{matrix}$

$\begin{matrix} x_2 & y_2 \\ (3, 0) \end{matrix}$

β) $y = -2x + 6$, $\Sigma(2x + 3, k)$

$k = -2(2x + 3) + 6$

$k = -4x - 6 + 6$

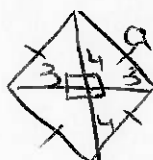
$k + 4x = 0$

$\frac{5k}{5} = \frac{0}{5}$

$k = 0$

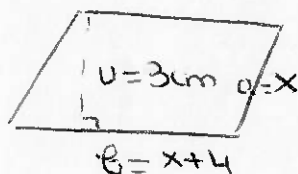
δ) ΕΚΤΟΖ ΥΛΗΣ

B3



$\delta_1 = 8 \text{ cm}$

$\text{Ερμμεου} = \text{Ενερμμου}$



$\Pi_{\text{ερμμου}} = 24 \text{ cm}$
 $u = 3 \text{ cm}$

δ) $\text{Ερμμεου} = 24 \text{ cm}^2$

$\text{Ερμμεου} = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$

$24 = \frac{8 \cdot \delta_2}{2}$

$\frac{24}{4} = \frac{8 \delta_2}{4}$

$\delta_2 = 6 \text{ cm}$

$\Pi. \Theta (h)^2 = (k_1)^2 + (k_2)^2$

$a^2 = 4^2 + 3^2$

$a^2 = 16 + 9$

$a^2 = 25$

$a = 5 \text{ cm}$

$\Pi = 4 \cdot a$

$\Pi = 4 \cdot 5$

$\Pi = 20 \text{ cm}$

α) $\Pi_{\text{ερμμου}} = 2a + 2b$

$24 = 2x + 2(x + 4)$

$24 = 2x + 2x + 8$

$24 - 8 = 4x$

$\frac{16}{4} = \frac{4x}{4}$

$x = 4$

$a = 4 \text{ cm}$

$b = 4 + 4 \Rightarrow b = 8 \text{ cm}$

β) $\text{Ενερμμου} = 6 \cdot u$

$\text{Ενερμμου} = 8 \cdot 3$

$\text{Ενερμμου} = 24 \text{ cm}^2$