

Λύσεις Επαναληπτικών Ενότητας 3: Διαιρετότητα

1. Να βρείτε με τη χρήση της ευκλείδειας διαίρεσης, τον αριθμό ο οποίος όταν διαιρεθεί με το 15 δίνει πηλίκο 5 και υπόλοιπο 3.

$$\Delta =; \quad \delta = 15 \quad \pi = 5 \quad \upsilon = 3$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \delta \cdot \pi + \upsilon \\ &= 15 \cdot 5 + 3 \\ &= 75 + 3 \\ &= 78 \end{aligned}$$

2. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των διαιρετών (χωρίς να κάνετε διαίρεση) να εξετάσετε αν αριθμός 16 διαιρεί το άθροισμα $3200+64$

$$3200 = 32 \cdot 100 = 16 \cdot 2 \cdot 100 = 16 \cdot 200 \Leftrightarrow 16|3200$$

$$64 = 16 \cdot 4 \Leftrightarrow 16|64$$

$$\Leftrightarrow 16|(3200 + 64)$$

Ιδιότητα: Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρεί δύο άλλους φυσικούς αριθμούς θα διαιρεί και το άθροισμα και τη διαφορά τους.

3. Να βάλετε σε κύκλο τους πρώτους αριθμούς:

Πρώτοι αριθμοί είναι οι αριθμοί που διαιρούνται μόνο με το 1 και τον εαυτό τους

4 , 5 , 9 , 13 , 15 , 23 , 27 , 39 , 43

4. Να σημειώσετε σε κάθε τετραγωνάκι το κατάλληλο ψηφίο ώστε ο αριθμός:

α) 67 0 να διαιρείται με το 5 και το 2

β) 23 4 να διαιρείται με το 9

γ) 3690 0 να διαιρείται με το 3 και το 2 .

ή

6

δ) 4 2 να διαιρείται με το 3 και το 5 και όχι με το 2.

ή

ή

ε) 3 7 να διαιρείται με το 25 και το 3.

ή

ή

ή

5. Να βρείτε τον Μ.Κ.Δ και το Ε.Κ.Π των αριθμών:

α) 18, 27, 45

β) 48, 60, 84

α)

18	2	27	3	45	3
9	3	9	3	15	3
3	3	3	3	5	5
1		1		1	

$$18 = 2 \cdot 3^2 \quad 27 = 3^3 \quad 45 = 3^2 \cdot 5$$

$$\text{Μ. Κ. Δ}(18, 27, 45) = 3^2 = 9$$

$$\text{Ε. Κ. Π}[18, 27, 45] = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 2 \cdot 27 \cdot 5 = 270$$

β)

48	2	60	2	84	2
24	2	30	2	42	2
12	2	15	3	21	3
6	2	5	5	7	7
3	3	1		1	
1					

$$48 = 2^4 \cdot 3 \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{Μ. Κ. Δ}(48, 60, 84) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\text{Ε. Κ. Π}[48, 60, 84] = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 16 \cdot 15 \cdot 7 = 1680$$

6. Οι μαθητές της Α' Γυμνασίου ενός σχολείου συγκέντρωσαν τα Χριστούγεννα τρόφιμα για να τα μοιράσουν σε άπορες οικογένειες. Κατάφεραν να συγκεντρώσουν 96 πακέτα μακαρόνια, 72 κουτιά γάλα και 48 πακέτα αλεύρι. Να υπολογίσετε:

α) πόσα **το πολύ όμοια δέματα** μπορούν να φτιάξουν, χωρίς να περισσέψει κανένα από τα τρόφιμα που συγκέντρωσαν

β) πόσα πακέτα μακαρόνια, κουτιά γάλα και πακέτα αλεύρι θα περιέχει το κάθε δέμα.

α)

96	2	72	2	48	2
48	2	36	2	24	2
24	2	18	2	12	2
12	2	9	3	6	2
6	2	3	3	3	3
3	3	1		1	
1					

$$96 = 2^5 \cdot 3 \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2 \quad 48 = 2^4 \cdot 3$$

$$M.K.\Delta(96, 72, 48) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ δέματα}$$

Απ. Θα φτιάξουν 24 όμοια δέματα β) $96 \div$

$24 = 4$ πακέτα μακαρόνια

$72 \div 24 = 3$ κουτιά γάλα

$48 \div 24 = 2$ πακέτα αλεύρι

Απ.: Το κάθε δέμα θα περιέχει 4 πακέτα μακαρόνια, 3 κουτιά γάλα και 2 πακέτα αλεύρι.

7. Τρία ταχύπλοα σκάφη (πλοιάρια) της Λιμενικής Αστυνομίας Κύπρου περιπολούν από διαφορετικές πλευρές την εξέδρα εξόρυξης φυσικού αερίου της Noble ξεκινώντας από το λιμάνι Λεμεσού. Το πρώτο ο Ερμής αναχωρεί από το λιμάνι κάθε 4 ώρες, το δεύτερο ο Ποσειδώνας αναχωρεί κάθε 5 ώρες και το τρίτο ο Διομήδης αναχωρεί κάθε 8 ώρες. Αν ξεκίνησαν **μαζί ταυτόχρονα** στις 16 Νοεμβρίου η ώρα 10.00 μ.μ. **πότε θα ξαναβρεθούν μαζί** στο λιμάνι Λεμεσού; (ακριβή ημερομηνία και ώρα)

α)

4	2	5	5	8	2
2	2	1		4	2
1				2	2
				1	

$$4 = 2^2 \quad 5 = 5 \quad 8 = 2^3$$

$$E.K.P[4, 5, 8] = 2^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40 \text{ ώρες}$$

40 ώρες = 24 ώρες + 16 ώρες = 1 μέρα + 16 ώρες θα περάσει 1 μέρα και 16 ώρες

10:00 μ.μ. 16 Νοεμ. 10:00 μ.μ. 17 Νοεμ. 2:00 μ.μ. 18 Νοεμ.



Μετά από 1 ημέρα



Μετά από 16 ώρες

Απ.: Θα ξαναβρεθούν στις 18 Νοεμβρίου στις 2:00 μ.μ.

8. Οι μαθητές ενός σχολείου είναι περισσότεροι από 500 και λιγότεροι από 600. Αν παραταχθούν σε εννιάδες, δεκάδες ή δεκαπεντάδες, περισσεύουν 8. Πόσοι είναι όλοι οι μαθητές του σχολείου;

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 9 & 3 & 10 & 2 & 15 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & & 1 & & 1 & \end{array}$$

$$9 = 3^2 \quad 10 = 2 \cdot 5 \quad 15 = 3 \cdot 5$$

$$\text{Ε.Κ.Π}[9, 10, 15] = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$$

Ο αριθμός που αναζητώ είναι πολλαπλάσιο του 90 (άρα και του 9, 10 και 15).

$$\Pi_{90} = \{ 90, 180, 270, 360, 450, 540, 630, \dots \}$$

$$\text{Αριθμός μαθητών} = 540 + 8 = 548$$

Οι μαθητές που περισσεύουν

Απ.: Οι μαθητές είναι 548.

Λύσεις Επαναληπτικών Ενότητας 4: ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(+4) + (-19) = -15$

β) $18 + 5 - 6 = -24 + 5 = -19$

γ) $(-17) - (+9) = (-17) + (-9) = -26$

δ) $(-7) \cdot (+5) = -35$

ε) $(-36) \div (-6) = +6$

στ) $(-1) \cdot (-4) \cdot (-5) = -20$

ζ) $+1\frac{5}{8} - 1\frac{3}{4} = +1\frac{5}{8} - 1\frac{6}{8} = -\frac{1}{8}$ ή $+1\frac{5}{8} - 1\frac{3}{4} = +\frac{13}{8} - \frac{7}{4} = +\frac{13}{8} - \frac{14}{8} = -\frac{1}{8}$

η) $-\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{15}{20} - \frac{8}{20} = -\frac{23}{20}$

θ) $-2\frac{1}{5} + (-1\frac{1}{2}) - \frac{3}{10} = -2\frac{2}{10} + (-1\frac{5}{10}) - \frac{3}{10} = -3\frac{8}{10} = -3\frac{4}{5}$

ι) $\frac{7}{9} \cdot (-\frac{3}{5}) = -\frac{7 \cdot 3}{9 \cdot 5} = -\frac{7 \cdot 1}{3 \cdot 5} = -\frac{7}{15}$

κ) $(-1\frac{2}{5}) : (-3\frac{1}{2}) = (-\frac{7}{5}) : (-\frac{7}{2}) = (-\frac{7}{5}) \cdot (-\frac{2}{7}) = +\frac{2}{5}$

λ) $(+5) - (-3) + (-2) - (+5) = +5 + 3 - 2 - 5 = +8 - 7 = +$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ (Σ) ή ΛΑΘΟΣ (Λ) τις παρακάτω προτάσεις βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

i. Το πηλίκο δύο αντίθετων αριθμών είναι ίσο με -1 .	☒ Σ / ☐ Λ
ii. Το γινόμενο $(-435) \cdot (-503) \cdot (+274) \cdot (-172) \cdot (-12) \cdot (-94)$ είναι θετικό.	Σ / ☒ Λ
iii. Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι μεγαλύτερη από το μηδέν.	☒ Σ / ☐ Λ
iv. Το άθροισμα δύο αντίθετων αριθμών είναι ίσο με μηδέν.	☒ Σ / ☐ Λ

3. Αν για τους ρητούς αριθμούς α και β ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις, να γράψετε τα συμπεράσματά σας για αυτούς:

- α) Αν ισχύει $\alpha + \beta = 0$, τότε οι αριθμοί α και β είναι **αντίθετοι**
- β) Αν ισχύει $\alpha \cdot \beta = +1$, τότε οι αριθμοί α και β είναι **αντίστροφοι**
- γ) Αν ισχύει $-\alpha \cdot \beta < 0$, τότε οι αριθμοί α και β είναι **ομόσημοι**
- δ) Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ τότε οι αριθμοί α και β είναι **ετερόσημοι**
- ε) Αν ισχύει $\alpha + \beta = \beta$, τότε $\alpha = 0$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- α) $2^3 = 8$
- β) $6^0 = 1$
- γ) $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$
- δ) $0^4 = 0$
- ε) $(-4)^2 = +16$
- στ) $(-3)^3 = -27$
- ζ) $-(-6)^2 = -(+36) = -36$
- η) $(5 - 6)^{12} = (-1)^{12} = +1$

5. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\begin{aligned}\alpha) \quad (-2)^3 - (+1)^3 - 7^0 &= (-8) - (+1) - 1 \\ &= -8 - 1 - 1 \\ &= -10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) \quad (-1)^5 - 2 \cdot (5 - 1)^2 &= (-1)^5 - 2 \cdot 4^2 \\ &= (-1) - 2 \cdot 16 \\ &= -1 - 32 \\ &= -33\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) \quad 6^2 - 3 \cdot 2^5 + 10^2 \div 5 &= 36 - 3 \cdot 32 + 100 \div 5 \\ &= 36 - 96 + 20 \\ &= 56 - 96 \\ &= -40\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta) \quad (2^3 - 3) \div (-5) + (3 - 5)^2 &= (8 - 3) \div (-5) + (-2)^2 \\ &= (+5) \div (-5) + (+4) \\ &= -1 + (+4) \\ &= +3\end{aligned}$$

6. Αν $\alpha = +6$, $\beta = -3$ και $\gamma = -4$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

$$\begin{aligned}\text{i)} \quad 5 - \alpha + \beta &= 5 - (+6) + (-3) \\ &= 5 - 6 - 3 \\ &= 5 - 9 = -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \alpha \div \beta - \beta \cdot \gamma &= (+6) \div (-3) - (-3) \cdot (-4) \\
 &= (-2) - (+12) \\
 &= -2 - 12 \\
 &= -14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } 2 \cdot (\alpha - \beta) - \gamma - 3 &= 2 \cdot [(+6) - (-3)] - (-4) - 3 \\
 &= 2 \cdot (+6 + 3) - (-4) - 3 \\
 &= 2 \cdot (+9) - (-4) - 3 \\
 &= +18 - (-4) - 3 \\
 &= 18 + 4 - 3 \\
 &= 22 - 3 \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \frac{\beta \cdot \gamma - \beta}{\alpha^2 : \gamma} = \frac{(-3) \cdot (-4) - (-3)}{(+6)^2 : (-4)} = \frac{(+12) - (-3)}{(+36) : (-4)} = \frac{+12+3}{-9} = \frac{+15}{-9} = -\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3}$$

7. Να κάνετε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

$$\begin{aligned}
 \alpha) \frac{\frac{2}{3}}{-5\frac{1}{4}} &= \left(\frac{2}{3}\right) : \left(-5\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) : \left(-\frac{21}{4}\right) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{21}\right) \\
 &= -\frac{8}{63}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta) \frac{(-2) : \left(-1\frac{1}{4}\right)}{\frac{2}{5} - \frac{1}{3}} &= \frac{\left(-\frac{2}{1}\right) : \left(-\frac{5}{4}\right)}{\frac{6}{15} - \frac{5}{15}} \\
 &= \frac{\left(-\frac{2}{1}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{1}{15}} = \frac{+\frac{8}{5}}{\frac{1}{15}} \\
 &= \left(+\frac{8}{5}\right) : \left(\frac{1}{15}\right) = \left(+\frac{8}{5}\right) \cdot \left(\frac{15}{1}\right) \\
 &= \left(+\frac{8}{1}\right) \cdot \left(\frac{5}{1}\right) = +40
 \end{aligned}$$

8. Αν ο αριθμός x είναι ο αντίθετος του $+5$ και ο αριθμός y είναι ο αντίστροφος του $-\frac{1}{3}$, να

υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = x \div y - (x - y)$

$$x = -5 \text{ και } y = -3$$

$$\begin{aligned}
 A = x \div y - (x - y) &= (-5) \div (-3) - [(-5) - (-3)] \\
 &= +\frac{5}{3} - (-5 + 3) \\
 &= +\frac{5}{3} - (-2) \\
 &= +1\frac{2}{3} + 2 = +3\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

9. Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με την απλοποιημένη της μορφή που βρίσκεται στη στήλη Β.

A	B
α. $x - 3x + 7x$	1. $-6x$
β. $2x + 6x - x$	2. $-16x$
γ. $-4x - 5x + 3x$	3. $5x$
δ. $-9x + x - 8x$	4. $7x$

α.	β.	γ.	δ.
<u>3</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>2</u>

10. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A = 5(x - 2\psi) - 4(3x + \psi - 2) - 12$

α) Να γράψετε την παράσταση Α σε πιο απλή μορφή

β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α, όταν $x = -2$ και $\psi = +1$

$$A = 5(x - 2\psi) - 4(3x + \psi - 2) - 12$$

$$A = 5x - 10\psi - 12x - 4\psi + 8 - 12$$

$$A = -7x - 14\psi - 4$$

$$A = -7 \cdot (-2) - 14 \cdot (+1) - 4$$

$$A = +14 - 14 - 4$$

Αντικαθιστώ όπου $x = -2$ και

$$\psi = +1$$

$$A = -4$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x + 5 - 2x = 3 + x$

$$\Leftrightarrow x - 2x - x = 3 - 5$$

$$\Leftrightarrow x - 3x = 3 - 5$$

$$\Leftrightarrow -2x = -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-2}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = +1$$

β) $3(2 + \gamma) = -18$

$$\Leftrightarrow 6 + 3\gamma = -18$$

$$\Leftrightarrow 3\gamma = -18 - 6$$

$$\Leftrightarrow 3\gamma = -24$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\gamma}{3} = \frac{-24}{3} \quad \Leftrightarrow \gamma = -8$$

$$\gamma) \quad 7(\beta - 1) = 5(3\beta - 2) - 5$$

$$\Leftrightarrow 7\beta - 7 = 15\beta - 10 - 5$$

$$\Leftrightarrow 7\beta - 15\beta = -10 - 5 + 7$$

$$\Leftrightarrow -8\beta = -8$$

$$\Leftrightarrow \frac{-8\beta}{-8} = \frac{-8}{-8}$$

$$\Leftrightarrow \beta = +1$$

$$\delta) \quad 3(\psi + 2) - 2(\psi - 1) = 5 - (\psi - 1)$$

$$\Leftrightarrow 3\psi + 6 - 2\psi + 2 = 5 - \psi + 1$$

$$\Leftrightarrow 3\psi - 2\psi + \psi = 5 + 1 - 6 - 2$$

$$\Leftrightarrow 2\psi = -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\psi}{2} = \frac{-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \psi = -1$$

$$\epsilon) \quad \frac{x}{3} + \frac{2x}{5} = \frac{3}{1}$$

$$\Leftrightarrow 5x + 6x = 45$$

$$\Leftrightarrow 11x = 45$$

$$\Leftrightarrow \frac{11x}{11} = \frac{45}{11}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{45}{11}$$

$$\sigma) \quad \frac{2(\omega-3)}{5} + \frac{\omega+2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8(\omega - 3) + 5(\omega + 2) = -10$$

$$\Leftrightarrow 8\omega - 24 + 5\omega + 10 = -10$$

$$\Leftrightarrow 8\omega + 5\omega = -10 + 24 - 10 \Leftrightarrow 13\omega = +4$$

$$\Leftrightarrow \frac{13\omega}{13} = \frac{+4}{13} \Leftrightarrow \frac{13\omega}{13} = \frac{+4}{13}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta) \quad & \frac{\alpha-1}{4} - \frac{2\alpha+3}{2} = \alpha - 1 \\
 \Leftrightarrow & (\alpha - 1) - 2(2\alpha + 3) = 4\alpha - 4 \\
 \Leftrightarrow & \alpha - 1 - 4\alpha - 6 = 4\alpha - 4 \\
 \Leftrightarrow & \alpha - 4\alpha - 4\alpha = -4 + 1 + 6 \\
 \Leftrightarrow & -7\alpha = +3 \\
 \Leftrightarrow & \frac{-7\alpha}{-7} = \frac{+3}{-7} \\
 \Leftrightarrow & \alpha = -\frac{3}{7}
 \end{aligned}$$

12. Να λύσετε τα πιο κάτω προβλήματα με τη χρήσης εξίσωσης.

- α) Ένας καταστηματάρχης πρέπει να προμηθεύσει το κατάστημά του με 150 ηλεκτρικές συσκευές. Χρειάζεται τετραπλάσιο αριθμό τηλεοράσεων από τον αριθμό των ψυγείων και 10 πλυντήρια ρούχων λιγότερα από το τριπλάσιο του αριθμού των ψυγείων. Πόσες τηλεοράσεις, πόσα ψυγεία και πόσα πλυντήρια ρούχων χρειάζεται για το κατάστημά του;

αριθμός ψυγείων: x
 αριθμός τηλεοράσεων: $4x$
 αριθμός πλυντηρίων: $3x - 10$

Εξίσωση: $x + 4x + 3x - 10 = 150$
 $\Leftrightarrow x + 4x + 3x = 150 + 10$
 $\Leftrightarrow 7x = 160$
 $\Leftrightarrow \frac{7x}{7} = \frac{160}{7} \Leftrightarrow x = 20$

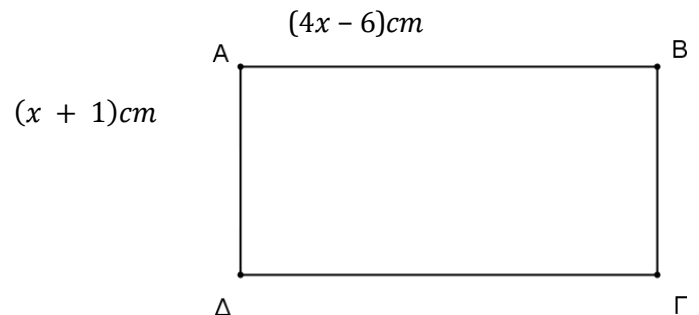
αριθμός ψυγείων: $x = 20$
 αριθμός τηλεοράσεων: $4x = 4 \cdot 20 = 80$
 αριθμός πλυντηρίων: $3x - 10 = 3 \cdot 20 - 10 = 60 - 10 = 50$

Ένας καταστηματάρχης πρέπει να προμηθεύσει το κατάστημά του με 150 ηλεκτρικές συσκευές.

Απ.: Το κατάστημα χρειάζεται 20 ψυγεία, 80 τηλεοράσεις και 50 πλυντήρια.

- β) Αν στο πιο κάτω ορθογώνιο η πλευρά AB είναι διπλάσια της AD, να υπολογίσετε την περίμετρό του.

$$\begin{aligned}
 (AB) &= 2 \cdot (AD) \\
 \Leftrightarrow 4x - 6 &= 2 \cdot (x + 1) \\
 \Leftrightarrow 4x - 6 &= 2x + 2 \\
 \Leftrightarrow 4x - 2x &= +2 + 6 \\
 \Leftrightarrow 2x &= +8 \\
 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} &= \frac{+8}{2} \quad \Leftrightarrow x = +4
 \end{aligned}$$



Η πλευρά AB είναι διπλάσια της AD.

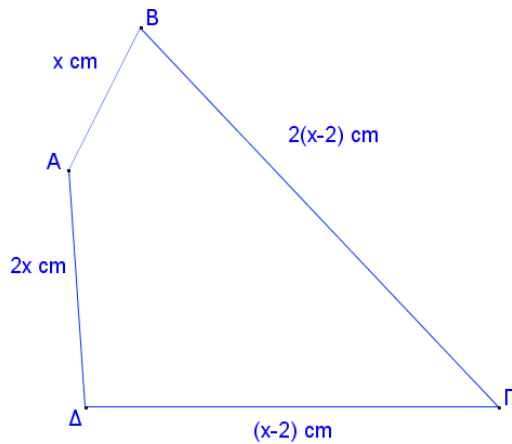
$$AB = 4x - 6 = 4 \cdot 4 - 6 = 16 - 6 = 10 \text{ cm}$$

$$A\Delta = x + 1 = 4 + 1 = 5 \text{ cm}$$

$$\Pi = 2 \cdot (AB) + 2 \cdot (A\Delta) = 2 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 20 + 10 = 30 \text{ cm}$$

Απ.: Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 30 cm.

γ) Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Η πλευρά ΑΔ είναι διπλάσια από την ΑΒ, η πλευρά ΔΓ είναι κατά 2 cm μικρότερη από την ΑΒ και η ΒΓ είναι διπλάσια από τη ΔΓ. Αν η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι 60 cm να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τετραπλεύρου.



Εξίσωση: $x + 2x + x - 2 + 2(x - 2) = 60$

$$\Leftrightarrow x + 2x + x - 2 + 2x - 4 = 60$$

$$\Leftrightarrow x + 2x + x + 2x = 60 + 2 + 4$$

$$\Leftrightarrow 6x = 66$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{66}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 11 \text{ cm}$$

$$AB = x = 11 \text{ cm}$$

$$BC = 2(x - 2) = 2 \cdot (11 - 2) = 2 \cdot 9 = 18 \text{ cm}$$

$$CD = x - 2 = 11 - 2 = 9 \text{ cm}$$

$$AD = 2x = 2 \cdot 11 = 22 \text{ cm}$$

Απ. : Η πλευρά ΑΒ είναι 11cm, η ΒΓ είναι 18cm, ΓΔ είναι 9 cm και η ΑΔ είναι 22 cm.

Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι 60 cm.

- δ) Ένας μαέστρος ανέλαβε να οργανώσει μια συναυλία με 3 διαφορετικά έγχορδα μουσικά όργανα: βιολιά, κιθάρες και βιολοντσέλα. Συνολικά χρησιμοποίησε 120 μουσικά όργανα. Τα βιολοντσέλα ήταν 20 λιγότερα από τα βιολιά και οι κιθάρες τριπλάσιες από τα βιολοντσέλα. Πόσα βιολιά, κιθάρες και βιολοντσέλα χρησιμοποιήθηκαν;

βιολιά: x
 βιολοντσέλα: $x - 20$
 κιθάρες: $3(x - 20)$

Χρησιμοποιήθηκαν 120
μουσικά όργανα

$$\begin{aligned}\text{Εξίσωση: } x + 3(x - 20) + x - 20 &= 120 \\ \Leftrightarrow x + 3x - 60 + x - 20 &= 120 \\ \Leftrightarrow x + 3x + x &= 120 + 60 + 20 \\ \Leftrightarrow 5x &= 200 \\ \Leftrightarrow \frac{5x}{5} &= \frac{200}{5} \\ \Leftrightarrow x &= 40\end{aligned}$$

βιολιά: $x = 40$
 βιολοντσέλα: $x - 20 = 40 - 20 = 20$
 κιθάρες: $3(x - 20) = 3 \cdot (40 - 20) = 3 \cdot 20 = 60$

Απ.: Χρησιμοποιήθηκαν 40 βιολιά, 60 κιθάρες και 20 βιολοντσέλα.

- ε) Σε μια θεατρική παράσταση το εισιτήριο για ενήλικες ήταν 8 ευρώ και για παιδιά 5 ευρώ. Την παράσταση παρακολούθησαν συνολικά 100 ενήλικες και παιδιά. Αν η συνολική είσπραξη ήταν 590 ευρώ, να υπολογίσετε πόσοι ήταν οι ενήλικες και πόσα τα παιδιά.

	Είσπραξη
Ενήλικες : x	$8x$
Παιδιά: $100 - x$	$5(100 - x)$

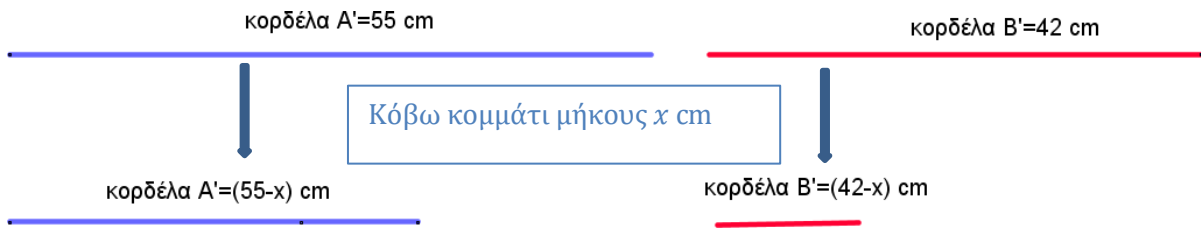
$$\begin{aligned}\text{Εξίσωση: } 8x + 5(100 - x) &= 590 \\ \Leftrightarrow 8x + 500 - 5x &= 590 \\ \Leftrightarrow 8x - 5x &= 590 - 500 \\ \Leftrightarrow 3x &= 90 \\ \Leftrightarrow \frac{3x}{3} &= \frac{90}{3} \\ \Leftrightarrow x &= 30\end{aligned}$$

Η συνολική είσπραξη
ήταν 590 ευρώ.

Ενήλικες : $x = 30$
 Παιδιά: $100 - x = 100 - 30 = 70$

Απ.: Τα παιδιά ήταν 70 και οι ενήλικες 30.

στ) Έχω δύο κορδέλες που έχουν μήκος 55 cm και 42 cm . Αν κόψω ένα κομμάτι $x\text{ cm}$ από κάθε κορδέλα, τότε η μια κορδέλα θα έχει διπλάσιο μήκος από την άλλη. Να υπολογίσετε το x .



Εξίσωση: $55 - x = 2(42 - x)$

$$\Leftrightarrow 55 - x = 84 - 2x$$

$$\Leftrightarrow -x + 2x = 84 - 55$$

$$\Leftrightarrow x = 29\text{ cm}$$

Αν κόψω ένα κομμάτι $x\text{ cm}$ από κάθε κορδέλα, τότε η μια κορδέλα θα έχει διπλάσιο μήκος από την άλλη.

Απ. : Το κομμάτι που έκοψα έχει μήκος 29 cm .

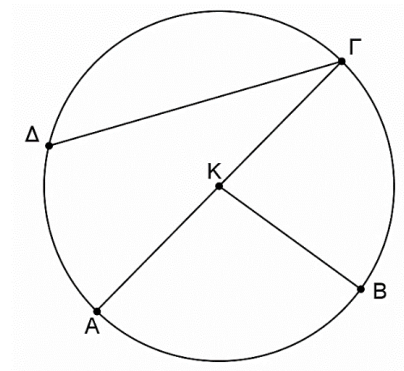
Λύσεις Επαναληπτικών Ενότητας 6: ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1. Στον πιο κάτω πίνακα να γράψετε το είδος της κάθε γωνίας χρησιμοποιώντας τους χαρακτηρισμούς : μηδενική , οξεία, ορθή, αμβλεία, ευθεία, μη κυρτή, πλήρης.

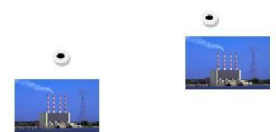
Μέτρο γωνίας	Είδος γωνίας	Μέτρο γωνίας	Είδος γωνίας
90°	ορθή	92°	αμβλεία
89°	οξεία	360°	πλήρης
180°	ευθεία	36°	οξεία
285°	μη κυρτή	0°	μηδενική

2. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R. Με τη βοήθεια του σχήματος να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της Α' στήλης με τα στοιχεία της Β' στήλης:

Α' στήλη	Β' στήλη
1) $ΑΓ$	α) επίκεντρη γωνία
2) $ΚΒ$	β) διάμετρος
3) $ΔΓ$	γ) τόξο
4) $Α\hat{B}$	δ) χορδή
5) $\widehat{ΑΔ}$	ε) ακτίνα

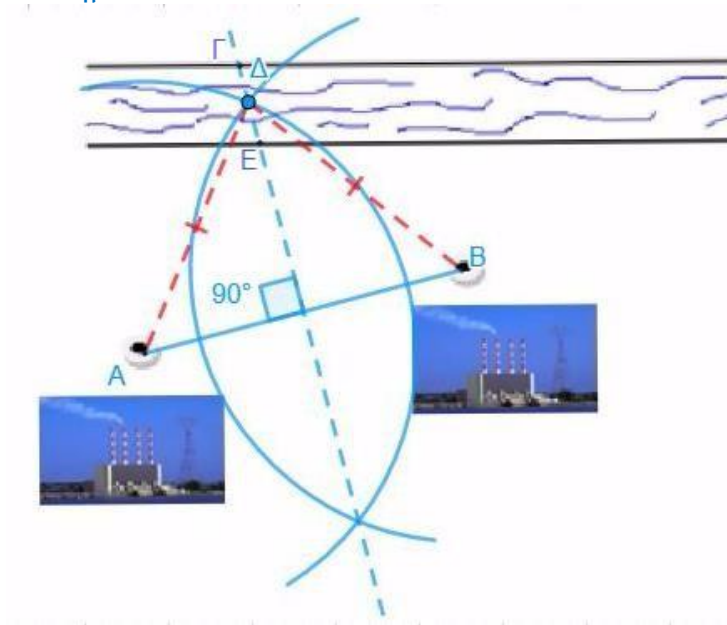


3. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο χωριά. Οι κοινοτάρχες τους αποφάσισαν να κατασκευάσουν μια γέφυρα πάνω από τον ποταμό, η οποία να ισαπέχει από τα δύο χωριά. Να βρείτε σε ποιο σημείο του ποταμού πρέπει να κατασκευαστεί η γέφυρα.

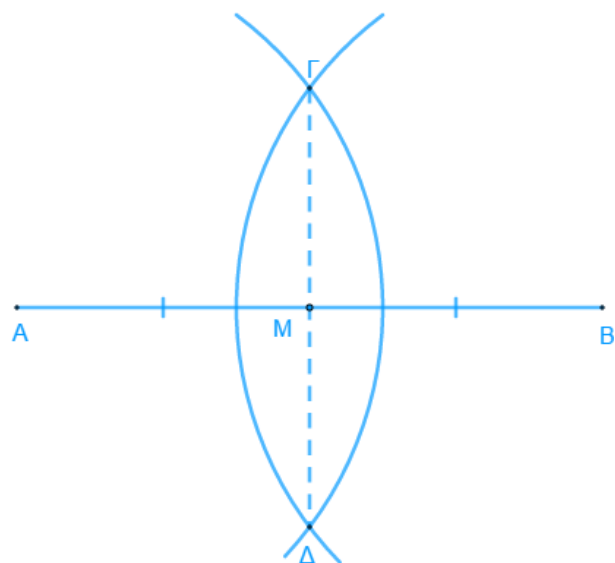


Πρέπει να κατασκευάσουμε τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο χωριά αφού έχουμε μάθει, ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του. (Κατασκευή μεσοκαθέτου βλέπετε Βιβλίο Μέρος Β' σελ. 52)

Η γέφυρα ΓΕ θα κατασκευαστεί πάνω στη μεσοκάθετη και θα περάσει από το σημείο Δ.



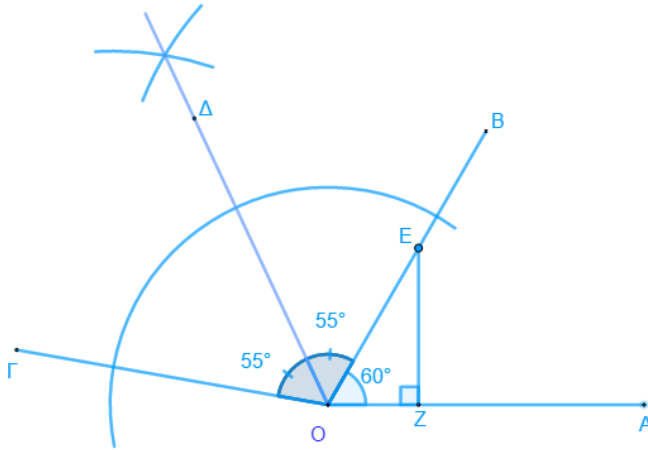
4. α) Να κατασκευάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB=8\text{cm}$.
 β) Να κατασκευάσετε τη **μεσοκάθετή** του με χρήση χάρακα και διαβήτη.
 Κατασκευή μεσοκάθετης βλέπετε Βιβλίο Μέρους Β' σελ. 52



5. Να κατασκευάσετε δυο **εφεξής γωνίες** $\hat{A}OB = 60^\circ$ και $\hat{B}OD = 110^\circ$

α) Να κατασκευάσετε τη **διχοτόμο** OD της γωνίας $\hat{B}OD$ με χάρακα και διαβήτη.

Κατασκευή διχοτόμου βλέπετε Βιβλίο Μέρους Β' σελ. 42



β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}OD$

$$\hat{A}OD = \hat{A}OB + \hat{B}OD = 60^\circ + 55^\circ = 115^\circ$$

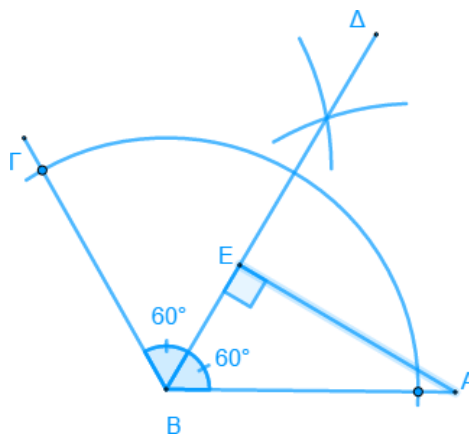
γ) Στη πλευρά BO να σημειώσετε τυχαίο σημείο E και να φέρετε την **απόσταση** του σημείου από την πλευρά OA .

Η απόσταση του σημείου E από την πλευρά OA είναι το ευθύγραμμο τμήμα EZ το οποίο φέρουμε κάθετα από το σημείο E στην OA .

6. Δίνεται γωνία $\hat{A}BG = 120^\circ$.

α) Να κατασκευάσετε τη **διχοτόμο** BD της γωνίας $\hat{A}BG$ με χάρακα και διαβήτη

Κατασκευή διχοτόμου βλέπετε Βιβλίο Μέρους Β' σελ. 42



β) Να φέρετε την **απόσταση** του σημείου A από τη διχοτόμο BD

Η απόσταση του σημείου A από τη διχοτόμο BD είναι το ευθύγραμμο τμήμα AE το οποίο φέρουμε κάθετα από το σημείο A στην BD .

7. Να υπολογίσετε τη γωνία που είναι κατά 10° μικρότερη από το τετραπλάσιο της συμπληρωματικής της

$$\hat{\alpha} = x$$

$$\hat{\beta} = 4x - 10^\circ$$

Εξίσωση: $x + 4x - 10^\circ = 90^\circ$ (συμπληρωματικές γωνίες)

$$x + 4x = 90^\circ + 10^\circ$$

$$\cancel{5}x = \frac{100^\circ}{\cancel{5}}$$

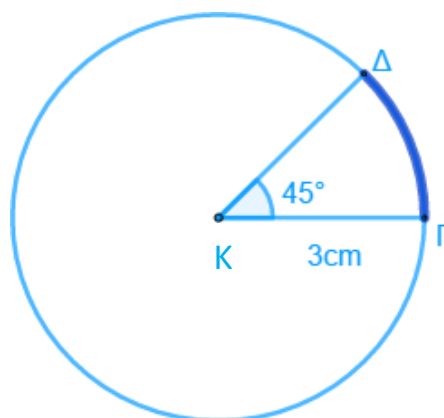
$$x = 20^\circ$$

$$\hat{\alpha} = x = 20^\circ$$

$$\hat{\beta} = 4x - 10 = 4 \cdot 20^\circ - 10^\circ = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$$

Απ.: Η ζητούμενη γωνία είναι ίση με 70° .

8. Να κατασκευάσετε κύκλο (Κ, 3cm) και τόξο ΓΔ που να αντιστοιχεί σε γωνία 45° .



9. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα R.

- i. Να υπολογίσετε την τιμή του φ .

$$\varphi + 40^\circ + 90^\circ + 2\varphi + 30^\circ + 2\varphi = 360^\circ$$

(πλήρης γωνία)

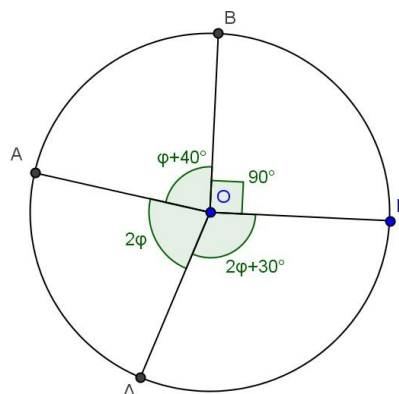
$$\Leftrightarrow \varphi + 2\varphi + 2\varphi + 160^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \varphi + 2\varphi + 2\varphi = 360^\circ - 160^\circ$$

$$\Leftrightarrow 5\varphi = 200^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\varphi}{5} = \frac{200^\circ}{5}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = 40^\circ$$



ii. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα τόξα και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας :

α) $\widehat{AB}$ β) $\widehat{\Gamma\Delta}$ γ) $\widehat{\Delta\Gamma A}$

α) $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = \varphi + 40^\circ = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ$

(το μέτρο του τόξου είναι ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας)

β) $\widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta OG} = 2\varphi + 30^\circ = 2 \cdot 40^\circ + 30^\circ = 80^\circ + 30^\circ = 110^\circ$

(το μέτρο του τόξου είναι ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας)

γ) $\widehat{\Delta\Gamma A} = \widehat{\Delta\Gamma} + \widehat{\Gamma B} + \widehat{BA} = \widehat{\Delta OG} + \widehat{GOB} + \widehat{BOA} = 110^\circ + 90^\circ + 80^\circ = 280^\circ$

(το μέτρο του τόξου είναι ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας)

iii. Τι είναι το ευθύγραμμο τμήμα OA για τη γωνία $\widehat{\Delta OB}$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

$\widehat{AOB} = 80^\circ$

$\widehat{\Delta OA} = 2\varphi = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$

$\widehat{AOB} = \widehat{\Delta OA} \rightarrow$ το ευθύγραμμο τμήμα OA είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta OB}$

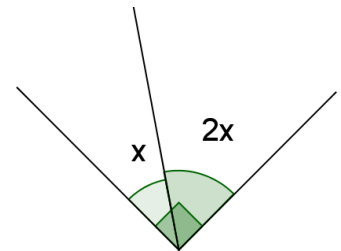
10. Να υπολογίσετε την τιμή των x , ψ και ω στα πιο κάτω σχήματα (χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου). Να χρησιμοποιήσετε εξισώσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας

α) $x + 2x = 90^\circ$ (συμπληρωματικές γωνίες)

$\Leftrightarrow 3x = 90^\circ$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{90^\circ}{3}$

$\Leftrightarrow x = 30^\circ$



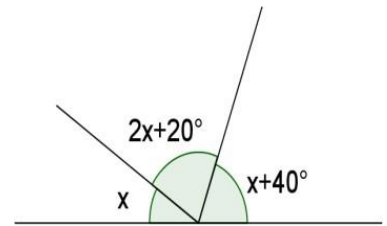
β) $x + 2x + 20^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$ (ευθεία γωνία)

$$\Leftrightarrow x + 2x + x = 180^\circ - 20^\circ - 40^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4x = 120^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{4} = \frac{120^\circ}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ$$



γ)

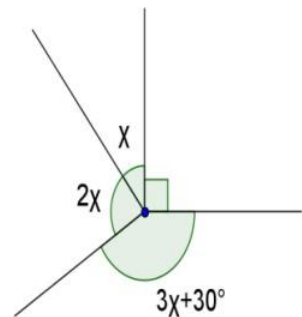
$$x + 90^\circ + 3x + 30^\circ + 2x = 360^\circ$$
 (πλήρης γωνία)

$$\Leftrightarrow x + 3x + 2x = 360^\circ - 90^\circ - 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow 6x = 240^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{240^\circ}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = 40^\circ$$



δ) $\omega = 70^\circ$ (κατακορυφήν γωνίες)

$(2\psi + 80)^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ (παραπληρωματικές γωνίες)

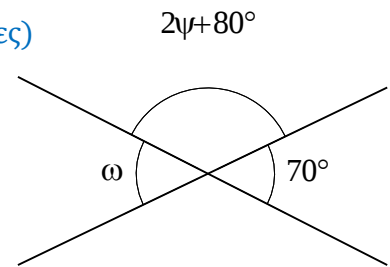
$$2\psi + 150^\circ = 180^\circ$$

$$2\psi = 180^\circ - 150^\circ$$

$$2\psi = 30^\circ$$

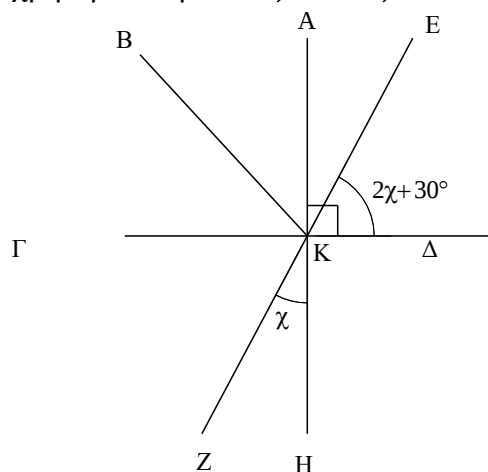
$$\frac{2\psi}{2} = \frac{30^\circ}{2}$$

$$\psi = 15^\circ$$



11. Στο πιο κάτω σχήμα η KB είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\hat{K}\Gamma}$ και $\widehat{A\hat{K}E} = 90^\circ$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , $\widehat{B\hat{K}A}$, $\widehat{\Gamma\hat{K}Z}$ και $\widehat{Z\hat{K}A}$ (χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου). Να χρησιμοποιήσετε εξισώσεις και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$\chi = \widehat{E\hat{K}A} \text{ (κατακορυφήν γωνίες)}$$

$$\widehat{A\hat{K}E} + \widehat{E\hat{K}A} = 90^\circ \text{ (συμπληρωματικές γωνίες)}$$

$$2\chi + 30^\circ + \chi = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2\chi + \chi = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\chi}{3} = \frac{60^\circ}{3}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 20^\circ$$

$$\widehat{Z\hat{K}A} = 200 + 90^\circ$$

$$\widehat{Z\hat{K}A} = 110^\circ$$

$$\widehat{A\hat{K}E} + \widehat{A\hat{K}\Gamma} = 180^\circ \text{ (παραπληρωματικές γωνίες)}$$

$$90^\circ + \widehat{A\hat{K}\Gamma} = 180^\circ$$

$$\widehat{A\hat{K}\Gamma} = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\widehat{A\hat{K}\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{B\hat{K}A} = \widehat{B\hat{K}\Gamma} = 45^\circ \text{ (KB διχοτόμος της } \widehat{A\hat{K}\Gamma}\text{)}$$

$$\widehat{\Gamma\hat{K}Z} + \widehat{Z\hat{K}H} = 90^\circ \text{ (συμπληρωματικές γωνίες)}$$

$$\widehat{\Gamma\hat{K}Z} + 20^\circ = 90^\circ$$

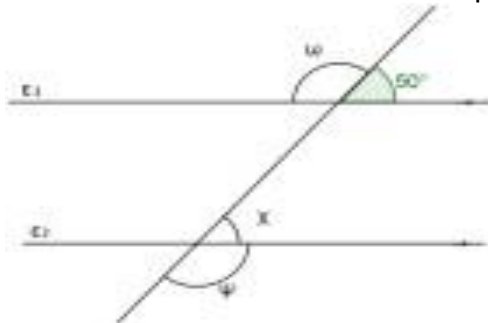
$$\widehat{\Gamma\hat{K}Z} = 90^\circ - 20^\circ$$

$$\widehat{\Gamma\hat{K}Z} = 70^\circ$$

Λύσεις Επαναληπτικών Ενότητας 9: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ II

1. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνιές στα πιο κάτω σχήματα αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
Να χρησιμοποιήσετε εξισώσεις και να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α)

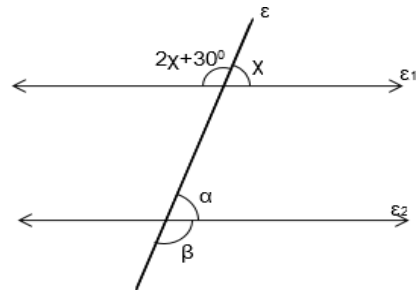


$$\chi = 50^\circ \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)}$$

$$\omega = 180 - 50 = 130^\circ \text{ (παραπληρωματικές)}$$

$$\psi = 130^\circ \text{ (παραπληρωματική με } \chi \text{)}$$

β)



$$2\chi + 30 + \chi = 180^\circ \text{ (παραπληρωματικές)}$$

$$\Leftrightarrow 3\chi = 150$$

$$\Leftrightarrow \chi = 50^\circ$$

$$\alpha = \chi = 50^\circ \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)} \quad \beta = 130^\circ$$

$$\text{(παραπληρωματική με } \alpha \text{)}$$

γ)



$$2\chi - 20 + \chi + 50 = 180^\circ \text{ (εντός επί τα αυτά μέρη)}$$

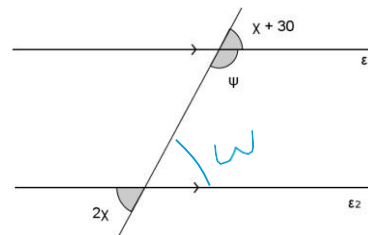
$$\Leftrightarrow 3\chi = 150$$

$$\Leftrightarrow \chi = 50$$

$$\omega = 2\chi - 20 = 80^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\psi = \chi + 50 = 100^\circ \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά)}$$

δ)



$$\omega = 2\chi \text{ (κατακορυφήν)}$$

$$\omega = \chi + 30^\circ \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη) Άρα}$$

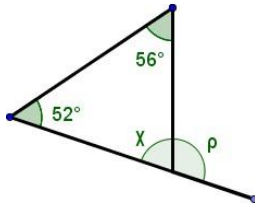
$$2\chi = \chi + 30$$

$$\Leftrightarrow \chi = 30$$

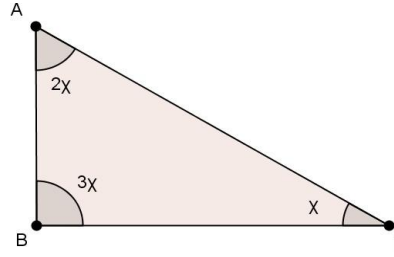
$$\psi = 120^\circ \text{ (παραπληρωματική με } \chi + 30 \text{)}$$

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ και ρ στα πιο κάτω τρίγωνα. Να δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

α)



β)



$$\begin{aligned}
 x + 52^\circ + 56^\circ &= 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow x + 108^\circ &= 180^\circ \\
 \Leftrightarrow x &= 180^\circ - 108^\circ \\
 \Leftrightarrow x &= 72^\circ \\
 \rho &= 52^\circ + 56^\circ \text{ (εξωτερική γωνία τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow \rho &= 108^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\chi + 3\chi + \chi &= 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow 6\chi &= 180 \\
 \Leftrightarrow \chi &= 30^\circ
 \end{aligned}$$

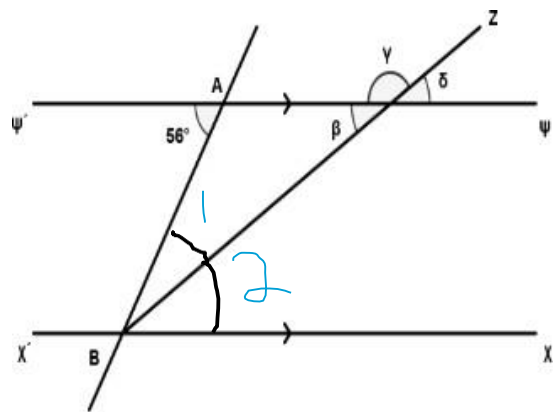
3. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία A είναι 30° μικρότερη από το διπλάσιο της γωνίας B και η γωνία Γ τριπλάσια από τη B . Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

$$\begin{aligned}
 A &= 2\chi - 30 & B &= \chi & \Gamma &= 3\chi \\
 A + B + \Gamma &= 180 \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)} \\
 \Leftrightarrow 2\chi - 30 + \chi + 3\chi &= 180 \\
 \Leftrightarrow 6\chi &= 210 \\
 \Leftrightarrow \chi &= 35
 \end{aligned}$$

4. Στο πιο κάτω σχήμα οι ευθείες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ είναι παράλληλες. Η BZ είναι η διχοτόμος της γωνίας B . Να υπολογίσετε τις γωνίες β , γ και δ .

$$B_1 = B_2 = x \text{ (BZ διχοτόμος)}$$

$$\begin{aligned}
 ABX &= \Psi AB \text{ (εντός εναλλάξ)} \\
 \Rightarrow 2x &= 56^\circ \\
 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} &= \frac{56^\circ}{2}
 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow x = 28^0$$

$$B_2 = \beta = 28^0 \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\beta = \delta = 28^0 \text{ (κατακορυφήν)}$$

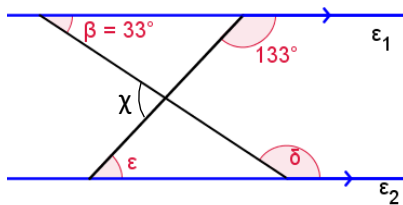
$$\gamma + \delta = 180^0 \text{ (παραπληρωματικές γωνίες)}$$

$$\Rightarrow \gamma + 28^0 = 180^0$$

$$\Leftrightarrow \gamma = 180^0 - 28^0$$

$$\Leftrightarrow \gamma = 152^0$$

5. Στο πιο κάτω σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες που είναι σημειωμένες.

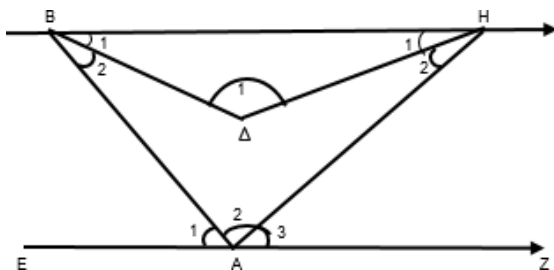


$$\varepsilon = 180 - 133 = 47^0 \text{ (εντός επί τα αυτά)}$$

$$\delta = 180 - 33 = 147^0 \text{ (εντός επί τα αυτά)}$$

$$\chi = 33 + 47 = 80^0 \text{ (εξωτερική γωνία τριγώνου)}$$

6. Στο πιο κάτω σχήμα έχουμε ότι $BH \parallel EZ$, $A_1 = 50^0$, $\Delta_1 = 135^0$, BD διχοτόμος της $AB\hat{H}$ και HD διχοτόμος της $AH\hat{B}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες B_1 , H_1 και A_3 .
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$B_1 = B_2 = x \text{ (} BD \text{ διχοτόμος)}$$

$$A_1 = ABH = 2x \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\Rightarrow 2x = 50^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{50^0}{2} \Leftrightarrow x = 25^0$$

$$B_1 + \Delta_1 + H_1 = 180^0 \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Leftrightarrow 25^0 + 135^0 + H_1 = 180^0$$

$$\Leftrightarrow 160^0 + H_1 = 180^0$$

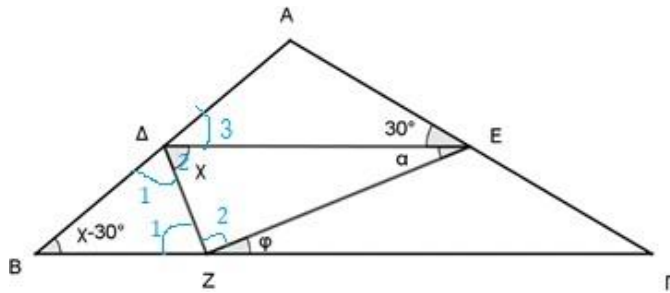
$$\Leftrightarrow H_1 = 180^0 - 160^0$$

$$\Leftrightarrow H_1 = 20^0$$

$$H_1 = H_2 = 20^0 \text{ (}\Delta H \text{ διχοτόμος)}$$

$$A_3 = AHB = H_1 + H_2 = 20^0 + 20^0 = 40^0 \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

7. Στο πιο κάτω τρίγωνο ΑΒΓ, δίνονται ΔΕ // ΒΓ, ΔΖ διχοτόμος της γωνίας ΒΔΕ, ΔÊΑ = 30° και ΔΖ ⊥ ΖΕ. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ, φ, α, ΒÂΓ και ΒΓÂ. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



$$\Delta_1 = \Delta_2 = x \text{ (}\Delta Z \text{ διχοτόμος)}$$

$$Z_1 = \Delta_2 = x \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$x - 30^\circ + x + x = 180^\circ \text{ (}\acute{\alpha}\theta\rho\omicron\iota\sigma\mu\alpha \text{ γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Leftrightarrow x + x + x = 180^\circ + 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{210^\circ}{3} \Leftrightarrow x = 70^\circ$$

$$Z_2 = 90^\circ \text{ (}\Delta Z \perp ZE\text{)}$$

$$x + 90^\circ + \hat{\alpha} = 180^\circ \text{ (}\acute{\alpha}\theta\rho\omicron\iota\sigma\mu\alpha \text{ γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Leftrightarrow 70^\circ + 90^\circ + \hat{\alpha} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 160^\circ + \hat{\alpha} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$$\hat{\phi} = \hat{\alpha} = 20^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 180^\circ \text{ (ευθεία γωνία)}$$

$$\Leftrightarrow 70^\circ + 70^\circ + \Delta_3 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 140^\circ + \Delta_3 = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \Delta_3 = 180^\circ - 140^\circ \Leftrightarrow \Delta_3 = 40^\circ$$

$$\text{Στο τρίγωνο } \Delta AE: \Delta + \hat{A} + E = 180^\circ \text{ (}\acute{\alpha}\theta\rho\omicron\iota\sigma\mu\alpha \text{ γωνιών τριγώνου)}$$

$$\Rightarrow 40^\circ + \hat{A} + 30^\circ = 180^\circ$$

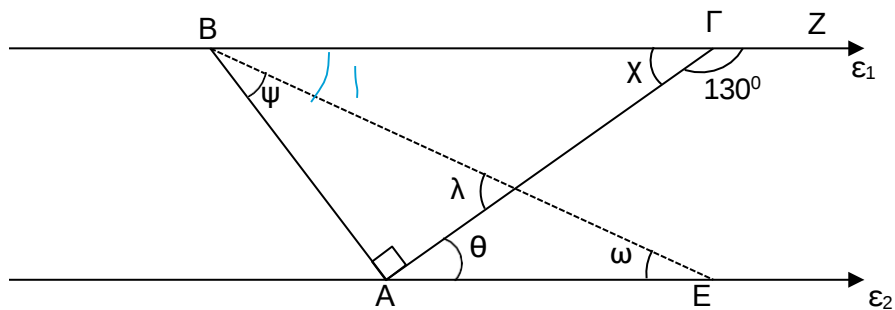
$$\Leftrightarrow 70^\circ + \hat{A} = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} = 110^\circ \Rightarrow \text{Β}\hat{\text{Α}}\Gamma = 110^\circ$$

$$\text{Β}\hat{\Gamma}\text{Α} = \Delta\hat{\text{Ε}}\text{Α} = 30^\circ \text{ (εντός εκτός και επί τα αυτά)}$$

8. Στο πιο κάτω σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $BA \perp AG$ και BE διχοτόμος της γωνιάς $AB\Gamma$ και $\angle \Gamma Z = 130^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\chi, \psi, \omega, \lambda$ και θ .
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



$$\chi = 180 - 130 = 50^\circ \text{ (παραπληρωματικές)}$$

$$B = 180 - (50 + 90) = 40^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνων)}$$

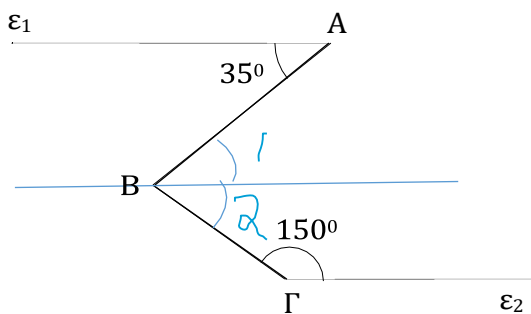
$$B_1 = \psi = \frac{40}{2} = 20^\circ \text{ (BE διχοτόμος)}$$

$$\omega = B_1 = 20^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\theta = \chi = 50^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\lambda = \theta + \omega = 70^\circ \text{ (εξωτερική γωνιά τριγώνου)}$$

9. Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $\angle A = 35^\circ$ και $\angle \Gamma = 150^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $AB\Gamma$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



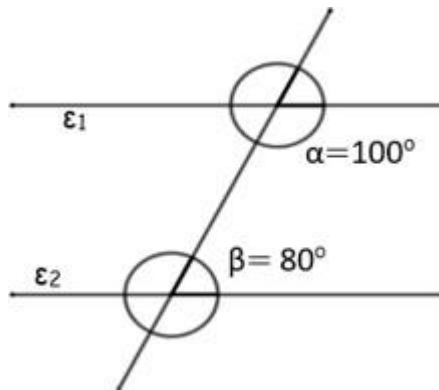
$$B_1 = A = 35^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$B_2 = \Gamma = 150^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\text{Γωνιά } AB\Gamma = B_1 + B_2 = 185^\circ$$

10. Στα πιο κάτω σχήματα να εξετάσετε αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

α)

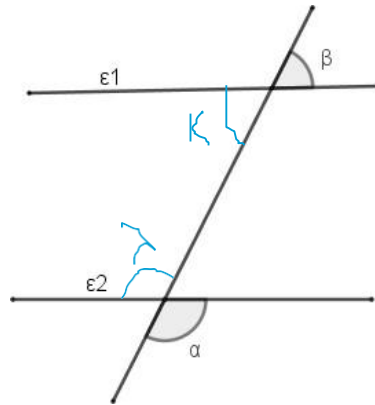


$$\alpha + \beta = 100 + 80 = 180^\circ$$

α και β σε θέση εντός και επί τα αυτά

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

β)



$$\alpha = 150^\circ - 2\theta \text{ και } \beta = 2\theta + 20^\circ$$

$\kappa = \beta$ (κατακορυφήν)

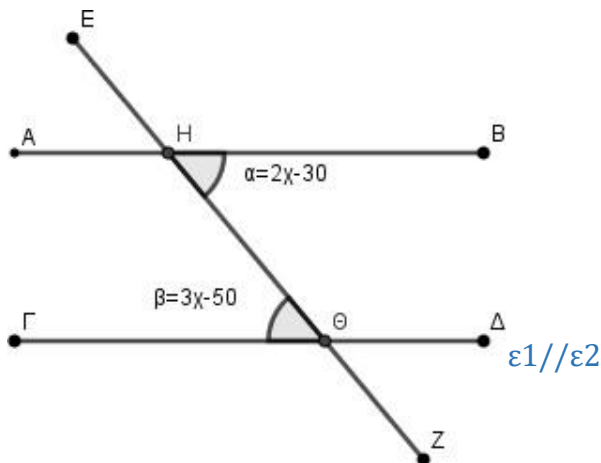
$\lambda = \alpha$ (κατακορυφήν)

$$\kappa + \lambda = \beta + \alpha = 2\theta + 20^\circ + 150^\circ - 2\theta = 180^\circ$$

κ, λ σε θέση εντός επί τα αυτά

11.

12. Να υπολογίσετε τον άγνωστο χ , έτσι ώστε $AB // \Gamma\Delta$.



Για να έχουμε $AB // \Gamma\Delta$ πρέπει οι γωνίες α και β που είναι σε θέση εντός εναλλάξ να είναι ίσες.

Άρα:

$$2\chi - 30^\circ = 3\chi - 50^\circ$$

$$\Leftrightarrow \chi = 20^\circ$$

Ενότητα 10: Λόγοι-Αναλογίες

1. Να υπολογίσετε το x στις πιο κάτω αναλογίες:

$$\begin{aligned} \alpha) \frac{x}{6} &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot x = 2 \cdot 6 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \frac{x+4}{x} &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow 5 \cdot (x+4) &= 3 \cdot x \\ \Leftrightarrow 5x + 20 &= 3x \\ \Leftrightarrow 5x - 3x &= 20 \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{2} &= \frac{20}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \frac{8}{x} &= \frac{4}{2-x} \\ \Leftrightarrow 8 \cdot (2-x) &= 4 \cdot x \\ \Leftrightarrow 16 - 8x &= 4x \\ \Leftrightarrow -8x - 4x &= -16 \\ \Leftrightarrow \frac{-12x}{-12} &= \frac{-16}{-12} \\ \Leftrightarrow x &= +\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \frac{x-2}{4} &= \frac{x+7}{16} \\ \Leftrightarrow 16 \cdot (x-2) &= 4 \cdot (x+7) \\ \Leftrightarrow 16x - 32 &= 4x + 28 \\ \Leftrightarrow 16x - 4x &= 32 + 28 \\ \Leftrightarrow \frac{12x}{12} &= \frac{60}{12} \\ \Leftrightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

2. Ο λόγος της ηλικίας του Βάσου προς την ηλικία του πατέρα του είναι 2:7. Αν ο πατέρας του είναι 42 χρονών, να υπολογίσετε την ηλικία του Βάσου.

Λόγος άρα κλάσμα

$$\begin{aligned} \frac{\text{Βάσος}}{\text{πατέρας}} &= \frac{2}{7} \Leftrightarrow \frac{B}{42} = \frac{2}{7} \\ &\Leftrightarrow 7B = 2 \cdot 42 \\ &\Leftrightarrow \frac{7B}{7} = \frac{2 \cdot 42}{7} \\ &\Leftrightarrow B = 12 \text{ χρόνων} \end{aligned}$$

3. Σε χάρτη με κλίμακα 1: 40000 η απόσταση μεταξύ δυο πόλεων είναι 10cm. Να υπολογίσετε την πραγματική απόσταση των δυο πόλεων.

$$\left(\text{κλίμακα} = \frac{\text{απόσταση στο σχέδιο}}{\text{απόσταση στην πραγματικότητα}} \right)$$

$$\frac{10cm}{x} = \frac{1}{40000} \Leftrightarrow 1 \cdot x = 10cm \cdot 40000$$

$$\Leftrightarrow x = 400000cm \quad 1m = 100cm$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{400000}{100}m$$

$$\Leftrightarrow x = 4000m \quad 1km = 1000m$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4000}{1000}m$$

$$\Leftrightarrow x = 4Km$$

4. Στην περίοδο εκπτώσεων ένα κατάστημα κάνει έκπτωση 20% σε όλα του τα είδη. Αν μια φούστα αρχικά κοστίζει 35 €, ποια τιμή θα έχει μετά την έκπτωση;

Αρχική Τιμή	Έκπτωση	Τελική Τιμή
100	20	$100 - 20 = 80$
35		x

$$\frac{100}{35} = \frac{80}{x} \Leftrightarrow 100 \cdot x = 80 \cdot 35$$

$$\Leftrightarrow \frac{100 \cdot x}{100} = \frac{80 \cdot 35}{100}$$

$$\Leftrightarrow x = 28€$$

5. Σε ένα μαθητικό διαγωνισμό από τους 30 μαθητές πέτυχαν οι 24. Ποιο ήταν το ποσοστό αποτυχίας;

$$\frac{24}{30} = \frac{x}{100} \quad (24 \text{ από τους } 30, x \text{ από τους } 100) \quad \text{ή κατασκευάζω πίνακα}$$

$$\Leftrightarrow 30 \cdot x = 24 \cdot 100$$

$$\Leftrightarrow \frac{30 \cdot x}{30} = \frac{24 \cdot 100}{30}$$

$$\Leftrightarrow x = 80\%$$

6. Το 30% των κατοίκων μιας πόλης έχουν πανεπιστημιακή μόρφωση. Αν όλοι οι κάτοικοι είναι 900, πόσοι κάτοικοι έχουν πανεπιστημιακή μόρφωση;

$$\text{Πανεπιστημιακή μόρφωση: } 30\% \text{ του } 900 = \frac{30}{100} \cdot 900 = 270 \text{ κάτοικοι}$$

ή κατασκευή πίνακα

7. Σε μια τάξη με 25 παιδιά τα 15 είναι αγόρια. Τι ποσοστό των παιδιών είναι τα κορίτσια;

$$\text{Αγόρια} = 15$$

$$\text{Κορίτσια} = 25 - 15 = 10$$

$$\frac{10}{25} = \frac{x}{100} \Leftrightarrow x = 4 \cdot 10 \Leftrightarrow x = 40\%$$

ή κατασκευή πίνακα

8. Τρία αδέρφια κληρονόμησαν από τον πατέρα τους €15 000 ανάλογα με τις ηλικίες τους. Ο Ανδρέας είναι 16 χρονών, η Άννα είναι 8 χρονών και ο Γιάννης είναι 6 χρονών. Πόσα χρήματα θα πάρει ο καθένας;

α = χρήματα Ανδρέα
 β = χρήματα Άννας
 γ = χρήματα Γιάννη

όλοι μαζί θα πάρουν €15 000, άρα $\alpha + \beta + \gamma = 15000$

$$\frac{\alpha}{16} = \frac{\beta}{8} = \frac{\gamma}{6} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{16 + 8 + 6} = \frac{15000}{30} = 500$$

Χρήματα που αντιστοιχούν για κάθε ένα έτος ζωής των αδερφιών αυτών

$$\frac{\alpha}{16} = \frac{500}{1} \Leftrightarrow 1 \cdot \alpha = 16 \cdot 500 \Leftrightarrow \alpha = \text{€ } 8\,000$$

$$\frac{\beta}{8} = \frac{500}{1} \Leftrightarrow 1 \cdot \beta = 8 \cdot 500 \Leftrightarrow \beta = \text{€ } 4\,000$$

$$\frac{\gamma}{6} = \frac{500}{1} \Leftrightarrow 1 \cdot \gamma = 6 \cdot 500 \Leftrightarrow \gamma = \text{€ } 3\,000$$

9. Κάποιος κέρδισε €18 000. Ξόδεψε το 30% των χρημάτων για την αγορά αυτοκινήτου. Τα υπόλοιπα τα μοίρασε στα παιδιά του **ανάλογα** με τις ηλικίες τους που ήταν 7 και 11 χρονών. Πόσα ξόδεψε για την αγορά του αυτοκινήτου και πόσα έδωσε στο κάθε παιδί;

Αρχικό Ποσό	Αγορά Αυτοκινήτου	Υπόλοιπο ποσό
100	30	$100 - 30 = 70$
18000		x

$$\frac{100}{18000} = \frac{70}{x} \Leftrightarrow 100 \cdot x = 70 \cdot 18000$$

$$\Leftrightarrow \frac{100 \cdot x}{100} = \frac{70 \cdot 18000}{100}$$

$$\Leftrightarrow x = \text{€ } 12\,600$$

α = χρήματα 11χρονου παιδιού
 β = χρήματα 7χρονου παιδιού

$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 12\,600 \\ \frac{\alpha}{11} = \frac{\beta}{7} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{11} = \frac{\beta}{7} = \frac{\alpha + \beta}{11 + 7} = \frac{12\,600}{18} = 700$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{11} = \frac{700}{1}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot \alpha = 11 \cdot 700$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \text{€ } 7700$$

$$\frac{\beta}{7} = \frac{700}{1}$$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot \beta = 7 \cdot 700$$

$$\Leftrightarrow \beta = \text{€ } 4900$$

10. Ένα κατάστημα ηλεκτρονικών ειδών προσφέρει έκπτωση 25% στην αρχική τιμή σε όλα τα προϊόντα. Αν η τελική τιμή ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή είναι €210, να υπολογίσετε την αρχική του τιμή.

Αρχική Τιμή	Έκπτωση	Τελική Τιμή
100	25	$100 - 25 = 75$
χ		210

$$\frac{100}{\chi} = \frac{75}{210} \Leftrightarrow 75 \cdot \chi = 100 \cdot 210$$

$$\Leftrightarrow \frac{75 \cdot \chi}{75} = \frac{100 \cdot 210}{75}$$

$$\Leftrightarrow \chi = \text{€ } 280$$

Λύσεις Ενότητας 11: Στατιστική- Πιθανότητες

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι μια φορά. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των πιο κάτω ενδεχομένων:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \nu(\Omega) = 6$$

A: Η ένδειξη να είναι άρτιος αριθμός. $A = \{2, 4, 6\} \quad \nu(A) = 3$

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

B: Η ένδειξη να είναι πρώτος αριθμός. $B = \{2, 3, 5\} \quad \nu(B) = 3$

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Γ: Η ένδειξη να είναι πολλαπλάσιο του 3. $\Gamma = \{3, 6\} \quad \nu(\Gamma) = 2$

$$P(\Gamma) = \frac{\nu(\Gamma)}{\nu(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Δ: Η ένδειξη να είναι αριθμός μικρότερος του 7. $\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \nu(\Delta) = 6$

$$P(\Delta) = \frac{\nu(\Delta)}{\nu(\Omega)} = \frac{6}{6} = 1$$

Βέβαιο ενδεχόμενο

E: Η ένδειξη να είναι διαιρέτης του 11 $E = \{ \} \text{ ή } \emptyset \quad \nu(E) = 0$

$$P(E) = \frac{\nu(E)}{\nu(\Omega)} = \frac{0}{6} = 0$$

Αδύνατο Ενδεχόμενο

2. Ένα σχολείο θα επιλέξει τυχαία μια **εργάσιμη μέρα** της εβδομάδας για να επισκεφτεί ένα αρχαιολογικό χώρο.

α) Να καταγράψετε το δειγματικό χώρο του πιο πάνω πειράματος.

$$\Omega = \{\text{Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή}\}$$

$$\nu(\Omega) = 5$$

β) Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα η επίσκεψη να γίνει μέρα Κυριακή;

$$B = \{ \} \text{ ή } \emptyset, \quad \nu(B) = 0$$

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{0}{5} = 0 \quad \text{Αδύνατο ενδεχόμενο}$$

γ) Ποια η πιθανότητα η επίσκεψη να γίνει Δευτέρα ή Πέμπτη;

$$\Gamma = \{\text{Δευτέρα, Πέμπτη}\}, \quad \nu(\Gamma) = 2$$

$$P(\Gamma) = \frac{\nu(\Gamma)}{\nu(\Omega)} = \frac{2}{5}$$

3. Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν 16 μπάλες αριθμημένες από το 1 μέχρι το 16. Η Εβελίνα θα επιλέξει μια μπάλα στην τύχη από το κιβώτιο.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}, \quad \nu(\Omega) = 16$$

Να υπολογίσετε τη πιθανότητα:

A: Ο αριθμός στην μπάλα να είναι ζυγός.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\} \quad , \quad \nu(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

B: Ο αριθμός στην μπάλα να είναι πολλαπλάσιο του 4.

$$B = \{4, 8, 12, 16\} \quad , \quad \nu(B) = 4$$

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Γ: Ο αριθμός στην μπάλα να διαιρείται με το 5.

$$\Gamma = \{5, 10, 15\} \quad , \quad \nu(\Gamma) = 3$$

$$P(\Gamma) = \frac{\nu(\Gamma)}{\nu(\Omega)} = \frac{3}{16}$$

Δ: Ο αριθμός στην μπάλα να είναι μικρότερος του 12.

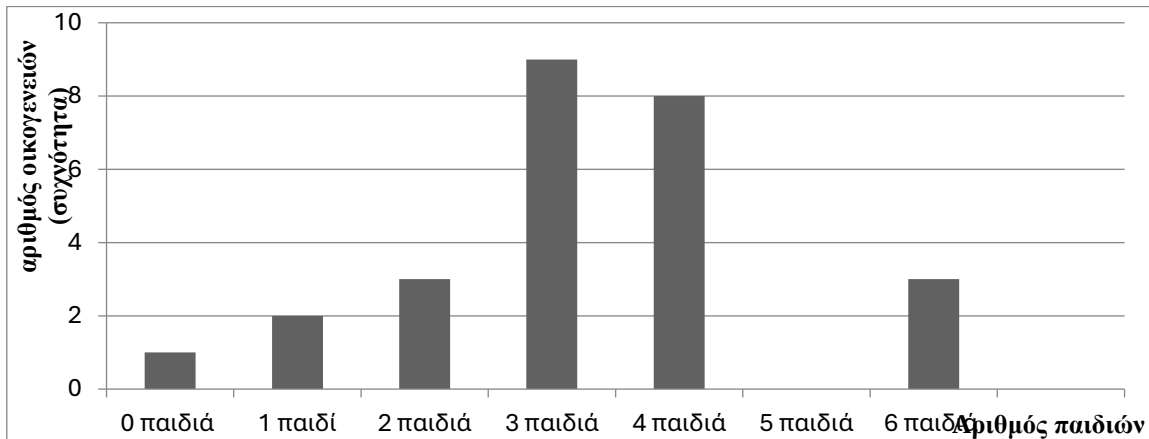
$$\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \quad , \quad \nu(\Delta) = 11, \quad P(\Delta) = \frac{\nu(\Delta)}{\nu(\Omega)} = \frac{11}{16}$$

E: Ο αριθμός στην μπάλα να είναι μεγαλύτερος του 17.

$$E = \{ \} \text{ ή } \emptyset, \quad \nu(E) = 0$$

$$P(E) = \frac{\nu(E)}{\nu(\Omega)} = \frac{0}{16} = 0 \quad \text{Αδύνατο ενδεχόμενο}$$

4. Το πιο κάτω διάγραμμα παρουσιάζει πόσα παιδιά έχει κάθε οικογένεια ενός χωριού:



α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

Αριθμός Παιδιών	Αριθμός Οικογενειών
0	1
1	2
2	3
3	9
4	8
5	0
6	3

β) Να βρείτε:

- Το είδος του διαγράμματος.
ραβδόγραμμα
- Το είδος της μεταβλητής

«αριθμός παιδιών» **ποσοτική**

- Πόσες οικογένειες υπάρχουν στο χωριό; $1 + 2 + 3 + 9 + 8 + 0 + 3 = 26$ **οικογένειες**
- Αν επιλέξουμε στην τύχη μια οικογένεια ποια η πιθανότητα να έχει τουλάχιστον τέσσερα παιδιά;

$$v(A) = 8 \quad P(A) = \frac{v(A)}{v(\Omega)} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$$

- Αν επιλέξουμε στην τύχη μια οικογένεια ποια η πιθανότητα να έχει **το πολύ τρία παιδιά**; (3 και κάτω άρα 0, 1, 2, 3 παιδιά)

$$v(B) = 1 + 2 + 3 + 9 = 15 \text{ οικογένειες} \quad P(B) = \frac{v(B)}{v(\Omega)} = \frac{15}{26}$$

5. Καταγράψαμε τα γκολ που πέτυχε η αγαπημένη ποδοσφαιρική μας ομάδα στους τελευταίους 20 αγώνες της:

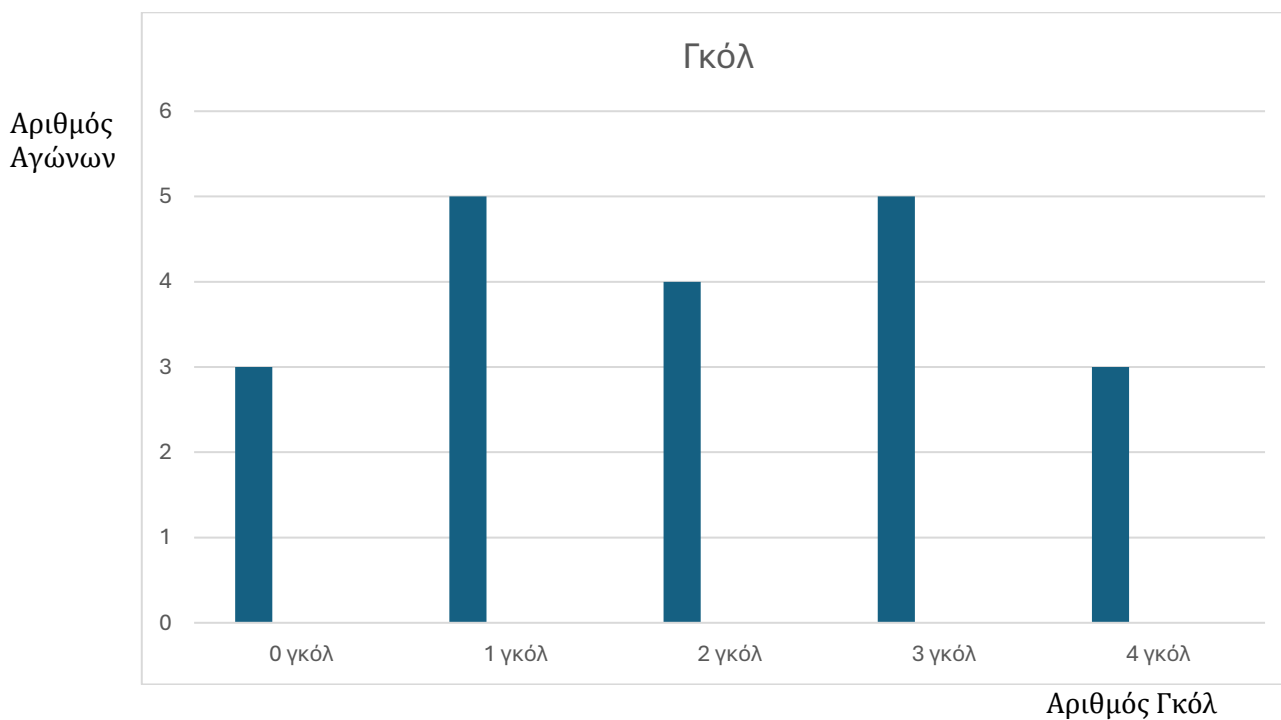
3 1 0 2 2 1 0 4 1 4
3 1 0 4 2 2 1 3 3 3

α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων.

Αριθμός γκολ (μεταβλητή – τί ερευνώ)	Αριθμός αγώνων (συχνότητα)
0	3
1	5
2	4
3	5
4	3
	+

20

β) Να κατασκευάσετε ραβδόγραμμα.



1. Σε ένα κιβώτιο υπάρχουν 6 μπάλες πάνω στις οποίες αναγράφονται οι εξής αριθμοί:



- α) Να γράψετε ποιοι από αυτούς τους αριθμούς διαιρούνται ακριβώς:

- i. με το 10 : **470**
- ii. με το 4 : **3624**
- iii. με το 2 και το 9 : **1026, 3624**
- iv. με το 3 και το 5 και όχι με το 2 : **5535**

- β) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους πιο πάνω αριθμούς, να βρείτε **την πιθανότητα** του ενδεχομένου:

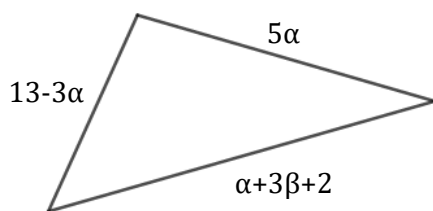
A : Ο αριθμός να διαιρείται με το 3

$$\Omega = \{333, 470, 1026, 5535, 125, 3624\} \quad \nu(\Omega) = 6$$

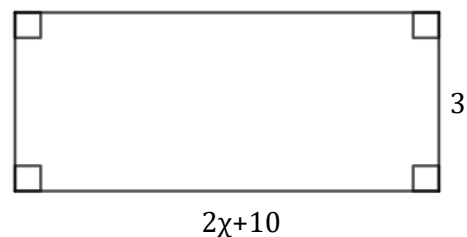
$$A = \{333, 1026, 5535, 125, 3624\} \quad \nu(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{5}{6}$$

2. Στα πιο κάτω σχήματα είναι ένα τρίγωνο και ένα ορθογώνιο.



πλάτος
τρίγωνου



μήκος:

$$P = 13 - 3\alpha + 5\alpha + \alpha + 3\beta + 2 = 15 + 3\alpha + 3\beta$$

- ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου.

$$E = (\text{μήκος}) \cdot (\text{πλάτος}) = 3 \cdot (2\chi + 10) = 6\chi + 30$$

- β) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 36 cm^2 , να υπολογίσετε την τιμή του χ .

$$E = 36 \text{ cm}^2$$

$$\Leftrightarrow 6\chi + 30 = 36$$

$$\Leftrightarrow 6\chi = 36 - 30$$

$$\Leftrightarrow 6\chi = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\chi}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 1$$

γ) Αν $\alpha + \beta = 5$, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.

$$P = 15 + 3\alpha + 3\beta$$

$$\Leftrightarrow P = 15 + 3 \cdot (\alpha + \beta)$$

$$\Leftrightarrow P = 15 + 3 \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow P = 15 + 15$$

$$\Leftrightarrow P = 30 \text{ μονάδες}$$

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Κ,10cm). Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ είναι σημεία στην περιφέρεια του κύκλου.

α) Να ονομάσετε τα πιο κάτω στοιχεία του κύκλου.

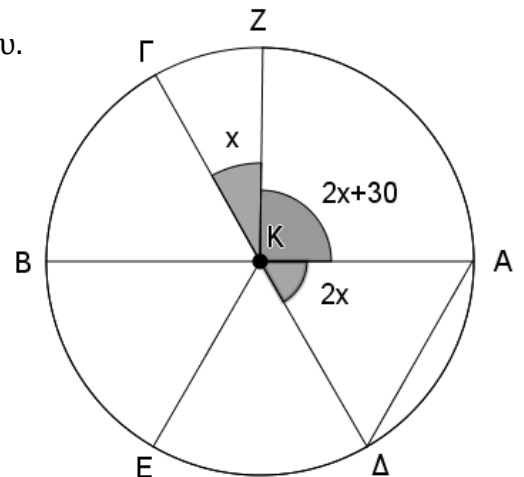
ΚΑ: Ακτίνα

ΑΔ: Χορδή

$\widehat{AK\Delta}$: επίκεντρη γωνία

ΕΑ: τόξο

ΓΔ: διάμετρος



β) Αν $\widehat{\Gamma K Z} = x^\circ$, $\widehat{Z K A} = (2x + 30)^\circ$, $\widehat{A K \Delta} = (2x)^\circ$ και ΚΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A K E}$. (Όλα τα πιο κάτω ερωτήματα να απαντηθούν χωρίς τη χρήση των γεωμετρικών οργάνων και να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας). Να υπολογίσετε:

i. το x

$$x + 2x + 30^\circ + 2x = 180^\circ \text{ (ΓΔ διάμετρος, ευθεία γωνία)}$$

$$\Leftrightarrow x + 2x + 2x = 180^\circ - 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow 5x = 150^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{150^\circ}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ$$

ii. τις γωνίες $\widehat{AK\Delta}$ και $\widehat{\Delta K E}$.

$$\widehat{AK\Delta} = 2x = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

$$\widehat{\Delta K E} = 2x = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \text{ (ΚΔ διχοτόμος)}$$

iii. το μέτρο του τόξου ΕΔ.

$$\widehat{ED} = \widehat{K\hat{E}} = 2x = 60^\circ$$

(το μέτρο του τόξου είναι ίσο με το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας)

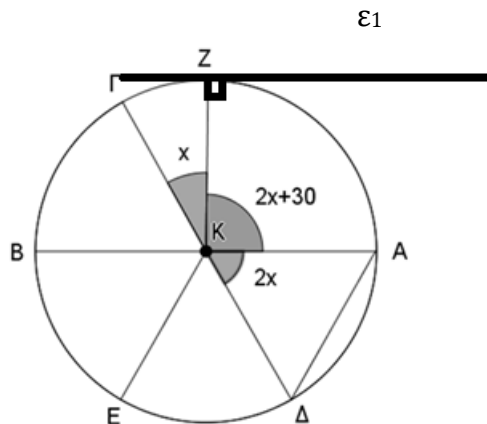
- iv. το μήκος των ευθύγραμμων τμημάτων $K\Gamma$ και $\Gamma\Delta$.

$$(K, 10cm) = (K, R) \Leftrightarrow R = 10cm$$

$$K\Gamma = R = 10cm \text{ (ακτίνα)}$$

$$\Gamma\Delta = 2R = 2 \cdot 10 = 20cm \text{ (διάμετρος)}$$

- γ) Να χρησιμοποιήσετε το γνώμονα στο πιο πάνω σχήμα για να φέρετε την εφαπτομένη ε_1 του κύκλου στο σημείο Z .



4. α) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων A, B, και Γ.

$$\begin{aligned} A &= -4^2 : \left[8 - 2 \cdot 2^3 - (+1)^6 : \left(-\frac{1}{4} \right) \right] + (7 - 9)^2 \\ &= -4^2 : \left[8 - 2 \cdot 8 - (+1) : \left(-\frac{1}{4} \right) \right] + (-2)^2 \\ &= -4^2 : \left[8 - 16 - (+1) \cdot \left(-\frac{4}{1} \right) \right] + (-2)^2 \\ &= -4^2 : [8 - 16 - (-4)] + (-2)^2 \\ &= -4^2 : [8 - 16 + 4] + (-2)^2 \\ &= -4^2 : (-4) + (-2)^2 \\ &= -16 : (-4) + (+4) \\ &= +4 + (+4) \\ &= +8 \end{aligned}$$

$$B = \frac{3\alpha+2\beta}{\alpha-\beta}, \text{ όπου } \alpha = +2 \text{ και } \beta = -1$$

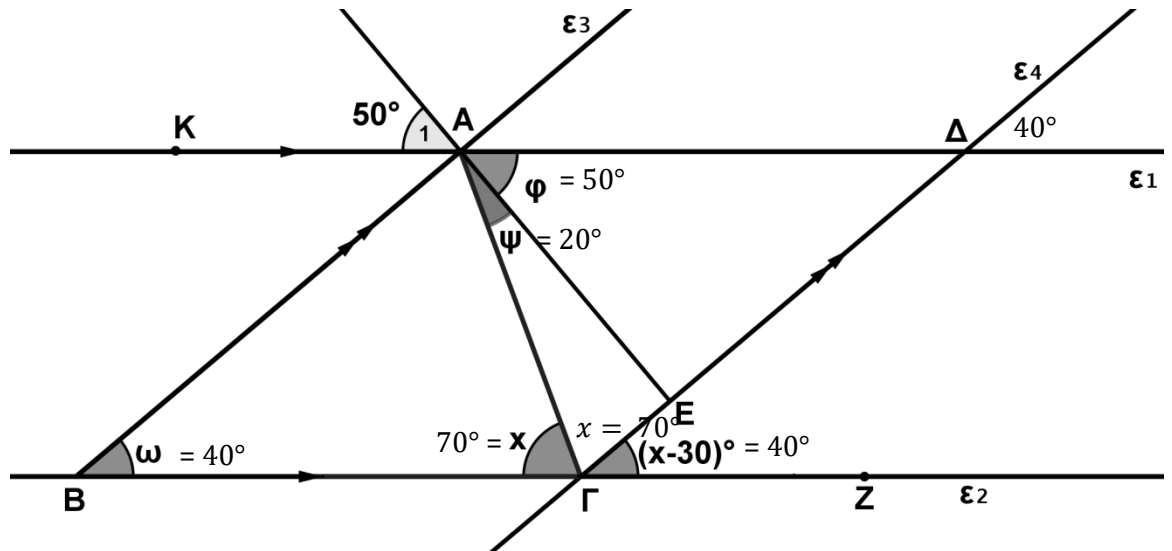
$$\begin{aligned} &= \frac{3 \cdot (+2) + 2 \cdot (-1)}{(+2) - (-1)} \\ &= \frac{+6 - 2}{(+2) + (+1)} \\ &= \frac{+4}{+3} \\ &= +\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \chi, \quad \text{όπου } \chi \text{ είναι η λύση της εξίσωσης } 2(\chi - 1) + 4 = 7 \\
 &\Leftrightarrow 2\chi - 2 + 4 = 7 \\
 &\Leftrightarrow 2\chi = 7 + 2 - 4 \\
 &\Leftrightarrow 2\chi = 5 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2\chi}{2} = \frac{5}{2} \\
 &\Leftrightarrow \chi = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \Gamma = \chi = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{\Gamma}{B} + 2A = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{4}{3}} + 2 \cdot (+8)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{2} : \left(+\frac{4}{3}\right) + 16 \\
 &= \frac{5}{2} \cdot \left(+\frac{3}{4}\right) + 16 \\
 &= \frac{15}{8} + 16 = 1\frac{7}{8} + 16 = 17\frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

5. Στο πιο κάτω σχήμα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$, $\hat{A}_1 = 50^\circ$, $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \omega$, $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = x^\circ$, $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{Z} = (x - 30)^\circ$, $\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E} = \varphi$, $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{E} = \psi$, $AE \perp \Gamma\Delta$ και $A\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$.



Να βρείτε:

- α) το μέτρο των γωνιών φ , x , ψ και ω , χωρίς τη χρήση μοιρογνωμονίου. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

$$\hat{\varphi} = 50^\circ \text{ (κατακορυφήν)}$$

$$\hat{A}\hat{E}\hat{\Delta} = 90^\circ (AE \perp \Gamma\Delta)$$

$$50^\circ + 90^\circ + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ \text{ (Άθροισμα γωνιών τριγώνου } A\Delta E)$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}\hat{\Delta}\hat{\Gamma} = 40^\circ$$

$$\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\hat{Z} = x - 30^\circ = 40^\circ \text{ (εντός εκτός επί τ' αυτά της } \hat{\Delta}) \text{ ή}$$

$$\Leftrightarrow x = 40^\circ + 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 70^\circ$$

$$\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = x \text{ (} A\Gamma \text{ διχοτόμος)}$$

$$x + x + x - 30^\circ = 180^\circ$$

$$\text{(ευθεία γωνία)}$$

$$3x = 180^\circ + 30^\circ$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{210^\circ}{3} \Leftrightarrow x = 70^\circ$$

$$x = \varphi + \psi = 70^\circ \text{ (εντός εναλλάξ)}$$

$$\Leftrightarrow 50^\circ + \psi = 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow \psi = 70^\circ - 50^\circ$$

$$\Leftrightarrow \psi = 20^\circ$$

$$\omega = \Delta\hat{\Gamma}Z = x - 30^\circ = 40^\circ \text{ (εντός εκτός επί τ' αυτά της } \Delta\hat{\Gamma}Z)$$

β) το είδος του τριγώνου ABΓ ως προς τις πλευρές

$$B\hat{A}\Gamma + 40^\circ + 70^\circ = 180^\circ \text{ (άθροισμα γωνιών τριγώνου ABΓ)}$$

$$\Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ$$

$$\Leftrightarrow B\hat{A}\Gamma = 70^\circ$$

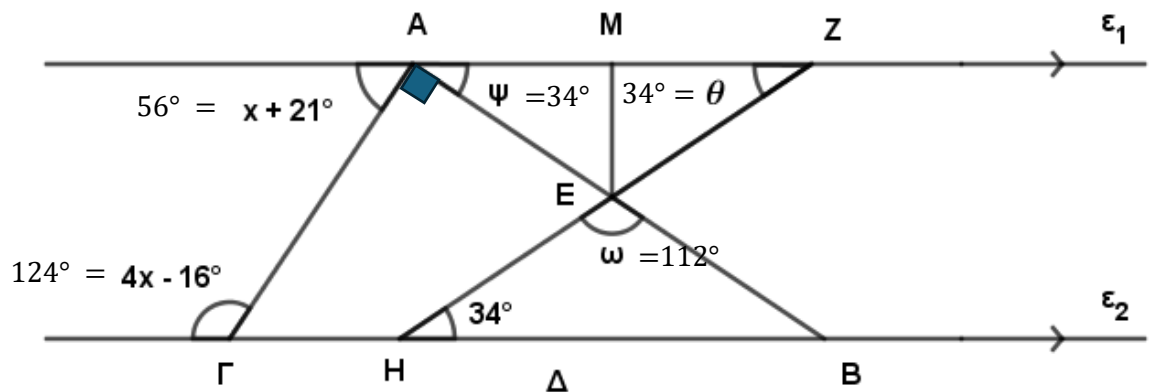
Άρα έχω δύο γωνίες ίσες, άρα και δύο πλευρές ίσες. Οπότε το τρίγωνο είναι ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ως προς τις πλευρές του

γ) το είδος του τριγώνου ABΓ ως προς τις γωνίες του.

Έχω τρεις γωνιές 70° , 70° και 40° , άρα όλες κάτω από 90° , άρα οξείες.

Οπότε το τρίγωνο είναι ΟΞΥΓΩΝΙΟ ως προς τις γωνίες του

6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $AB \perp AG$.



α) Να βρείτε:

i. την τιμή του x

$$x + 21^\circ + 4x - 16^\circ = 180^\circ \text{ (εντός επί τ' αυτά γωνίες)}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 180^\circ + 16^\circ - 21^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{175^\circ}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = 35^\circ$$

$$x + 21^\circ = 35^\circ + 21^\circ = 56^\circ$$

$$4x - 16^\circ = 4 \cdot 35^\circ - 16^\circ = 124^\circ$$

ii. το μέτρο των γωνιών ψ , ω και θ

$$B\hat{A}\Gamma = 90^\circ (AB \perp AG)$$

$$\hat{\psi} + 56^\circ + 90^\circ = 180^\circ \text{ (ευθεία γωνία)}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\psi} = 180^\circ - 56^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\psi} = 34^\circ$$

$$\hat{\theta} = 34^\circ (\text{εντός εναλλάξ της } Z\hat{H}B)$$

$$\widehat{AEZ} + 34^\circ + 34^\circ = 180^\circ (\text{άθροισμα γωνιών τριγώνου } AEZ)$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AEZ} = 180^\circ - 34^\circ - 34^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{AEZ} = 112^\circ$$

$$\hat{\omega} = 112^\circ (\text{κατακορυφήν της } \widehat{AEZ})$$

iii. το είδος του τριγώνου AZE ως προς τις γωνίες του

Έχω γωνιές 112° , 34° και 34° , άρα δύο κάτω από 90° , άρα οξείες και μία πάνω από 90° άρα αμβλεία.
Οπότε το τρίγωνο είναι ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟ ως προς τις γωνίες του

iv. το είδος του τριγώνου AZE ως προς τις πλευρές του.

Έχω γωνιές 112° , 34° και 34° , άρα έχω δύο γωνίες ίσες μεταξύ τους, άρα και δύο πλευρές ίσες, οπότε το τρίγωνο είναι ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ως προς τις πλευρές τους.

β) Αν ΕΜ ύψος του τριγώνου AZE και $AM = 3\kappa - 2$ και $MZ = \kappa + 4$ να υπολογίσετε το κ .

(Να δικαιολογήσετε πλήρως όλες τις απαντήσεις σας)

ΕΜ ύψος ισοσκελούς τριγώνου, άρα και διάμεσος του τριγώνου.

Άρα $AM = MZ$

$$3\kappa - 2 = \kappa + 4$$

$$\Leftrightarrow 3\kappa - \kappa = 2 + 4 \Leftrightarrow \frac{2\kappa}{2} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow \kappa = 3$$